Mathématiques - 2 BCPST 1 - Lycée Michel Montaigne

DM N°12 - **Pour le 7 mars 2016**

« File d'attente - Somme, différence de variables exponentielles indépendantes »

Rappels

1) *Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et de densités respectives f et g alors la variable aléatoire $X+Y$ est une variable de densité $f*g$ définie par :*

$$f*g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, g(x-t)\mathrm{d}t. \tag{1}$$

$f*g$ est appelé produit de convolution des fonctions f et g.

2) *Une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $a>0$ admet pour densité la fonction f définie par*

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = ae^{-ax} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

Partie I - Somme de variables exponentielles indépendantes.

On considère une suite de variables aléatoires Δ_1, Δ_2, $\ldots$, Δ_n indépendantes définies sur un espace probabilisé, suivant toutes la loi exponentielle de paramètre a ($a>0$). Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = \Delta_1 + \cdots + \Delta_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \Delta_k$.

1. Donner les valeurs de $E(T_n)$ et de $V(T_n)$.

2. Démontrer qu'une densité de la variable aléatoire T_2 est donnée par la fonction f_2 définie par :

$$\begin{cases} f_2(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ f_2(x) = a^2xe^{-ax} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

Vous devez utiliser le produit de convolution : rappel (1)

3. Justifier par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ l'existence d'une densité f_n pour la variable T_n et déterminer l'expression de f_n.

Partie II - Différence de de variables exponentielles indépendantes.

On considère deux variables aléatoires Δ_2 et W_1indépendantes définies sur un espace probabilisé, suivant des lois exponentielles de paramètres respectifs a et b a ($a>0, b>0$).
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $V_2 = W_1 - \Delta_2$

1. Montrer qu'une densité de la variable aléatoire $-\Delta_2$ est la fonction g définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = f(-t)$$

2. Démontrer qu'une densité de la variable aléatoire V_2 est donnée par la fonction h définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} h(x) = \dfrac{ab}{a+b}\, e^{-bx} & \text{si } x \geq 0 \\ h(x) = \dfrac{ab}{a+b}\, e^{ax} & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Vous devez utiliser le produit de convolution : rappel (1)

3. Déterminer les probabilités que V_2 soit positif, que V_2 soit négatif.

Partie III - File d'attente à un guichet : « premier arrivé, premier servi ».

Nous considérerons un bureau de poste ne possédant qu'un seul guichet. Un client qui arrive dans ce bureau se retrouve nécessairement dans l'une des situations suivantes :
- Il se fait servir tout de suite si le guichet est libre
- Il prend place dans la file d'attente si le guichet est occupé, se fait servir dès que tous ses prédécesseurs dans la file ont été servis.

Une fois servi, il quitte aussitôt le bureau de poste.
On modélise cette situation en notant, pour tout entier naturel n non nul :
- T_n l'instant d'arrivée dans la poste du $n^{\text{ième}}$ client [1]
- U_n sa durée d'attente dans la file ($U_n = 0$ si le guichet est libre)
- S_n la durée de son service au guichet
- $W_n = U_n + S_n$ la durée de présence dans la poste.

Nous conviendrons que $T_0 = 0$ et poserons pour tout entier naturel n non nul : $\Delta_n = T_n - T_{n-1}$.
On a alors

$$T_0 = 0, \quad T_1 = \Delta_1, \quad \text{et } \forall n \geq 1, \ T_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta_k.$$

Nous ferons en outre les hypothèses suivantes :
i) les variables aléatoires $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \ldots, S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ sont indépendantes.
ii) les variables aléatoires $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \ldots$ suivent toutes la loi exponentielle de paramètre a.
iii) les variables aléatoires $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ suivent toutes la loi exponentielle de paramètre b.
iv) $b > a$

Nous noterons F_n et G_n les fonctions de répartition des variables aléatoires U_n et W_n et **admettrons** le résultat $_1$ suivant :

$$\mathcal{R}_1 : \qquad F_n \text{ et } G_n \text{ sont continues sur } [0, +\infty[.$$

Nous supposerons que lorsque le premier client arrive, le guichet est libre. Autrement dit

$$U_1 \ \text{ est la variable certaine égale à } \ 0 \ \text{ et } \ W_1 = S_1 \hookrightarrow \mathscr{E}(b).$$

1. On s'intéresse à la loi de U_2.

(a) Pour $u < 0$, que vaut $F_2(u)$?

(b) Justifier $[U_2 = 0] = [W_1 - \Delta_2 \leq 0]$. En déduire $P(U_2 = 0) = \dfrac{b}{a+b}$ puis donner $F_2(0)$.

(c) Soit $u > 0$ fixé.
Justifier l'égalité

$$[U_2 \leq u] = [U_2 = 0] \cup [0 < W_1 - \Delta_2 \leq u] .$$

En déduire $F_2(u) = 1 - \dfrac{a}{a+b} e^{-bu}$.

(d) La variable aléatoire U_2 admet-elle une densité de probabilité ?

1. Les clients sont numérotés selon leur ordre d'arrivée après le déclenchement du chronomètre

2. Nous vous proposons la simulation suivante :

```
from numpy import *
from random import *
#**********************************************
def SIMULATION(UnSura,UnSurb,N):
    T=zeros([N+1,1]);
    U=zeros([N+1,1]);
    S=zeros([N+1,1]);
    W=zeros([N+1,1]);
    Resultat=zeros([N+1,4]);
    Delta=zeros([N+1,1]);
    a=1/UnSura;b=1/UnSurb;
    #Client 1
    Delta[1]=-1/a*log(1-random());# Construction de l'alea Delta(1)
    T[1]=Delta[1]
    S[1]=-1/b*log(1-random()); # Construction de l'alea S(1)
    U[1]=0;
    W[1]=S[1];
    #Client 2
    Delta[2]=-1/a*log(1-random());# Construction de l'alea Delta(2)
    T[2]=T[1]+Delta[2];
    S[2]=-1/b*log(1-random());# Construction de l'alea S(2)
    if W[1]<Delta[2]:
        U[2]=0;
    else:
        U[2]=W[1]-Delta[2];
    W[2]=U[2]+S[2];
    #Client 3
    Delta[3]=-1/a*log(1-random());# Construction de l'alea Delta(3)
    T[3]=T[2]+Delta[3];
    S[3]=-1/b*log(1-random());# Construction de l'alea S(3)
    if W[2]<Delta[3]:
        U[3]=0;
    else:
        U[3]=W[2]-Delta[3];
    W[3]=U[3]+S[3];
    K=3;
    while K<=N-1:
        K=K+1;
        #Client K :
        Delta[K]=-1/a*log(1-random());# Construction de l'alea Delta(K)
        T[K]=T[K-1]+Delta[K];
        S[K]=-1/b*log(1-random());# Construction de l'alea S(K)
        if W[K-1]<Delta[K]:
            U[K]=0;
        else:
            U[K]=W[K-1]-Delta[K];
        W[K]=U[K]+S[K];
    for i in range(1,N+1):
        Resultat[i,0]=round(T[i,0],4)
        Resultat[i,1]=round(U[i,0],4)
        Resultat[i,2]=round(S[i,0],4)
        Resultat[i,3]=round(W[i,0],4)
    return Resultat
```

Voici pour $a = \frac{1}{5}$ et $b = \frac{1}{3}$, les résultats de deux simulations pour les 10 premiers clients :

```
In [1]: Resultat=SIMULATION(5,3,10)
print(Resultat)
[[  0.        0.        0.        0.    ]
 [  0.2771    0.        3.3212    3.3212]
 [  0.4243    3.1739    5.818     8.992 ]
 [  0.4836    8.9327    0.7255    9.6582]
 [  8.0843    2.0574    1.8562    3.9137]
 [ 16.6254    0.        2.3957    2.3957]
 [ 23.3836    0.        3.2185    3.2185]
 [ 27.4023    0.        0.2361    0.2361]
 [ 43.306     0.        2.3212    2.3212]
 [ 45.6805    0.        1.2565    1.2565]
 [ 50.2852    0.        4.054     4.054 ]]

In [2]: Resultat=SIMULATION(5,3,10)
print(Resultat)
[[  0.        0.        0.        0.    ]
 [  0.2527    0.        1.4465    1.4465]
 [  1.9523    0.        3.3161    3.3161]
 [  6.9498    0.        3.4267    3.4267]
 [  7.9902    2.3863   12.0553   14.4416]
 [  9.4119   13.0199    6.9197   19.9396]
 [ 16.2955   13.056     0.737    13.7929]
 [ 20.2281    9.8604    6.9925   16.8529]
 [ 24.9836   12.0973    1.6881   13.7854]
 [ 38.8146    0.        0.1313    0.1313]
 [ 47.0546    0.        0.6114    0.6114]]
```

(a) Quelle est l'espérance du temps de service choisie et le temps moyen de service observé dans chacune simulation ?

(b) Quelle est l'espérance du nombre de clients par unité de temps et le nombre moyen de clients par unité de temps observé dans chacune simulation ?

(c) Que représente chacune des quatre colonnes ?

3. <u>Lien avec la Loi de Poisson</u>
Nous nous proposons ici de déterminer la Loi du nombre X_t de clients arrivés dans le bureau de poste entre l'instant 0 et l'instant t où t est un réel strictement positif quelconque.
Par exemple :

- Dans la première simulation : X_{30} a pris la valeur 7
- Dans la seconde simulation : X_{30} a pris la valeur 8.

(a) Préciser le lien entre l'événement $[T_k \leq t]$ et la variable X_t.

(b) En déduire la Loi de la variable X_t.

(c) En déduire une méthode de simulation de la Loi de Poisson.