Correction du devoir n°3

1. (a) Soit $\mathscr{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des applications définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles ; c'est un espace vectoriel de référence et $\mathcal{S} \subset \mathscr{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$;
   $\mathcal{S}$ est non vide car il contient la fonction nulle ;
   Soient à présent f et g deux éléments quelconques de $\mathcal{S}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:
   — $f \in \mathcal{S}$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ (x^2-1)\,f'(x) = 4\,x\,f(x)$, de même
   — $g \in \mathcal{S}$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ (x^2-1)\,g'(x) = 4\,x\,g(x)$;
   ainsi $\forall x \in \mathbb{R},\ (x^2-1)\Big(\lambda\,f'(x)+g'(x)\Big) = \lambda\,(x^2-1)\,f'(x) + (x^2-1)\,g'(x) = \lambda\,4\,x\,f(x) + 4\,x\,g(x)$.
   On en déduit que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ donc c'est bien un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

   (b) Une primitive de $x \mapsto \dfrac{4\,x}{x^2-1}$ est par exemple $x \mapsto 2\,\ln\left|x^2-1\right| = \ln\left(x^2-1\right)^2$, donc :
   - $\star$ $\mathcal{S}_1 = \Big\{x \in]-\infty,-1[\longmapsto K_1\,\left(x^2-1\right)^2,\ K_1 \in \mathbb{R}\Big\}$.
   - $\star$ $\mathcal{S}_2 = \Big\{x \in]-1,+1[\longmapsto K_2\,\left(x^2-1\right)^2,\ K_2 \in \mathbb{R}\Big\}$.
   - $\star$ $\mathcal{S}_3 = \Big\{x \in]1,+\infty[\longmapsto K_3\,\left(x^2-1\right)^2,\ K_3 \in \mathbb{R}\Big\}$.

   (c) Si $\mathcal{E}$ admet une solution f définie sur $\mathbb{R}$, alors ses restrictions aux intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,+1[$ et $]1,+\infty[$ respectivement appartiennent respectivement aux ensembles $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ et $\mathcal{S}_3$.
   D'autre part f est continue sur $\mathbb{R}$, donc $\displaystyle\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x)$ c'est à dire $\displaystyle\lim_{x\to -1^-} K_1\,\left(x^2-1\right)^2 = \lim_{x\to -1^+} K_2\,\left(x^2-1\right)^2$.
   Ces limites sont nulles quelles que soient les valeurs de K_1 et K_2.
   De plus f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc ses dérivées à droite et à gauche en -1 sont égales : $f'_g(-1) = f'_d(-1)$ soit $\displaystyle\lim_{x\to -1^-} \frac{K_1\,\left(x^2-1\right)^2}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{K_2\,\left(x^2-1\right)^2}{x+1}$; de même ces limites sont nulles quelles que soient les valeurs de K_1 et K_2.
   On a des résultats analogues pour les limites en 1, donc on déduit que l'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions solution de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}$ est l'ensemble de toutes les fonctions de la forme $x \longmapsto K_1\,\left(x^2-1\right)^2$ pour $x \in]-\infty,-1[$, $x \longmapsto K_2\,\left(x^2-1\right)^2$ pour $x \in [-1,1]$ et $x \longmapsto K_3\,\left(x^2-1\right)^2$ pour $x > 1$, où K_1, K_2, K_3 sont des constantes réelles quelconques.

   (d) Pas de question

   (e)
```
def f(x):
    return x**4-2*x**2+1

from numpy import linspace
from matplotlib.pyplot import *
x1=linspace(-5,-1,100)
y1=f(x1)
plot(x1,y1,'r')

x2=linspace(-1,1,100)
y2=f(x2)
plot(x2,y2,'k')

x3=linspace(1,5,100)
y3=f(x3)
plot(x3,y3,'g')
```

   (f) La fonction f_1 correspond aux valeurs $(K_1,\ K_2,\ K_3) = (1,\ 0,\ 0)$, c'est donc bien une solution de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}$; de même f_2 et f_3 correspondent respectivement à $(K_1,\ K_2,\ K_3) = (0,\ 1,\ 0)$ et $(K_1,\ K_2,\ K_3) = (0,\ 0,\ 1)$
   Une solution f de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}$ peut donc s'écrire $f = K_1\,f_1 + K_2\,f_2 + K_3\,f_3$, ainsi la famille $(f_1,\ f_2,\ f_3)$ engendre $\mathcal{S}$.
   On vérifie ensuite que la famille $(f_1,\ f_2,\ f_3)$ est libre : soient K_1, K_2, K_3 tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ K_1\,f_1(x) + K_2\,f_2(x) + K_3\,f_3(x) = 0$.
   En particulier pour $x = -2$, on a $9\,K_1 = 0$ donc $K_1 = 0$, on obtient $K_2 = K_3 = 0$ en prenant par exemple $x = 0$ puis $x = 2$, en conclusion :
   $$\boxed{(f_1,\ f_2,\ f_3) \text{ est une base de } \mathcal{S}}$$

2. (a) On vérifie tout d'abord que Φ est linéaire : soient P et Q deux polynômes de E et soit $\lambda \in \mathbb{R}$
   $\Phi(\lambda\,P+Q) = (X^2-1)\,(\lambda\,P'+Q) - 4\,X\,(\lambda\,P+Q) = \lambda\Big((X^2-1)\,P' - 4\,X\,P\Big) + \Big((X^2-1)\,Q' - 4\,X\,Q\Big) = \lambda\,\Phi(P) + \Phi(Q)$.
   Ensuite, pour tout $P \in E$, $\Phi(P)$ est un polynôme ; de plus si $\deg(P) \leqslant 3$ alors $\deg\big((X^2-1)\,P'\big) \leqslant 4$ et $\deg(-4\,X\,P) \leqslant 4$ donc $\Phi(P) \in E$; et $\Phi(X^4) = -4\,X^3 \in E$. Donc dans tous les cas, pour $P \in E$, $\Phi(P) \in E$ et Φ est bien un endomorphisme de E.

(b) Soit $P \in \ker(\Phi)$, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x^2-1)\,P'(x) - 4\,x\,P(x) = 0$ donc en tant que fonction polynomiale, P est solution de l'équation différentielle $\mathcal{E}$. Donc P est de la forme $K_1\,f_1 + K_2\,f_2 + K_3\,f_3$, mais comme P est un polynôme, $K_1 = K_2 = K_3$.

$$\boxed{\ker(\Phi) = \mathrm{Vect}\langle (X^2-1)^2\rangle.}$$

(c) D'après la formule du rang, on sait que $\mathrm{Im}(\Phi)$ est de dimension 4, on sait aussi qu'il est engendré par les images des vecteurs d'une base, par exemple la base canonique de E :
$\Phi(X^k) = (X^2-1)\,k\,X^{k-1} - 4\,X^{k+1} = (k-4)\,X^{k+1} - k\,X^{k-1}$, ainsi
$\Phi(1) = -4\,X$, $\Phi(X) = -3\,X^2 - 1$, $\Phi(X^2) = -2\,X^3 - 2\,X$, $\Phi(X^3) = -X^4 - 3\,X^2$ et $\Phi(X^4) = -4\,X^3$.
Soit alors $R = a\,X^4 + b\,X^3 + c\,X^2 + d\,X + e \in \mathrm{Im}(\Phi)$, $\exists P = \alpha\,X^4 + \beta\,X^3 + \gamma\,X^2 + \delta\,X + \varepsilon \in E$ tel que $R = \Phi(P) = \alpha\,\Phi(X^4) + \beta\,\Phi(X^3) + \gamma\,\Phi(X^2) + \delta\,\Phi(X) + \varepsilon\,\Phi(1)$
On obtient alors $R = -\beta\,X^4 - 2\,(2\,\alpha+\gamma)\,X^3 - 3\,(\beta+\delta)\,X^2 - 2\,(\gamma + 2\,\varepsilon)\,X - \delta$ et par identification $c = 3\,(a+e)$.
Réciproquement, si la condition $c = 3\,(a+e)$ est vérifiée, alors $R = \Phi(P)$ a des solutions et l'on a :

$$\begin{cases} \alpha &= \dfrac{-2\,\gamma - b}{4} \\ \beta &= -a \\ \delta &= -e \\ \varepsilon &= \dfrac{-2\,\gamma - d}{4} \end{cases}$$

(d) Déterminer une solution polynomiale de cette équation différentielle revient à trouver un antécédent par Φ du polynôme $Q = 3\,X^2 + X + 1$; or ce polynôme appartient bien à $\mathrm{Im}(\Phi)$ car il vérifie la condition déterminée à la question précédente.
Deux antécédents quelconques P_1 et P_2 de Q vérifient $\Phi(P_1) = \Phi(P_2) = Q$ et $P_1 - P_2 \in \ker(\Phi)$, c'est à dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P_2 = P_1 + \lambda\,(X^2-1)^2$.
Si on a déterminé un antécédent P_1 de Q, P_1 est donc de degré inférieur ou égal à 4, il existe une unique valeur de λ telle que $P_2 = P_1 + \lambda\,(X^2-1)^2$ soit de degré inférieur ou égal à 3, ce qui montre l'existence d'un unique polynôme de degré 3 au maximum solution de l'équation différentielle.

(e) En résolvant le système obtenu à la question 2c, en choisissant $\alpha = 0$ on trouve $P = -X - \dfrac{1}{4}$.

3. D'après le principe de superposition, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation différentielle s'obtient en ajoutant une solution quelconque de l'équation homogène associée à une solution particulière, par exemple à la fonction polynomiale $x \mapsto 3\,x^2 + x + 1$.
Ainsi $\mathcal{S} = \left\{K_1\,f_1 + K_2\,f_2 + K_3\,f_3 + P,\ (K_1,\,K_2,\,K_3) \in \mathbb{R}^3\right\}$ où f_1, f_2, f_3 sont les fonctions définies à la question 1d.
On constate que la fonction nulle n'est pas solution, donc $\mathcal{S}$ n'est pas un espace vectoriel.

4. (a)

```python
def DERIVE(P):
    P.pop(0)
    n=len(P)
    for k in range(n):
        P[k]*=(k+1)
    return P

def FOIS_XN(L,n):
    return [0]*n+L

def FOIS(L,a):
    n=len(L)
    for k in range(n):
        L[k]*=a
    return L

def PHIPHI(L):
    N=len(L)
    Phi3=FOIS(FOIS_XN(L,1),-4)
    Pprime=DERIVE(L)
    Phi1=FOIS_XN(Pprime,2)
    Phi2=FOIS(Pprime,-1)+[0]*2
    Phiphi=[0]*(N+1)
    for k in range(N+1):
        Phiphi[k]=Phi1[k]+Phi2[k]+Phi3[k]
    return Phiphi
```

(b) Ce calcul renvoie la liste $[1, 1, 3]$ qui correspond au polynôme $3\,X^2 + X + 1$, ce qui permet de retrouver le résultat de la question 2e.