Corrigé du devoir surveillé

Partie I

1. (a) Soit $A > 0$; la fonction $f : t \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{-(x-a)t}{2}}$ est continue sur le segment $[0, A] \subset [0, +\infty[$ donc
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\frac{-(x-a)t}{2}}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-2}{x-a}\,\mathrm{e}^{\frac{-(x-a)t}{2}}\right]_0^A = \frac{2}{x-a}\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{-(x-a)A}{2}}\right)$
$\dfrac{-(x-a)A}{2} < 0$ donc $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{-(x-a)A}{2}} = 0$; l'intégrale converge et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\frac{-(x-a)t}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{x-a}$

   (b) Soit $x > a$; l'application $t \mapsto f(t)\,\mathrm{e}^{-x\,t}$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$, en effet :
$\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-xt} f(t) = 0$ donc $\exists B > 0$ tel que $\forall t > B$, $\left|\mathrm{e}^{-xt} f(t)\right| < 1$; d'autre part $[0, B]$ est un segment donc $t \mapsto f(t)\,\mathrm{e}^{-x\,t}$ est bornée sur $[0, B]$ en tant que fonction continue sur un segment.
Soit $A > a$: $\displaystyle\left|\int_0^A f(t)\,\mathrm{e}^{-x\,t}\,\mathrm{d}t\right| = \int_0^A \mathrm{e}^{\frac{-(x-a)t}{2}}\left(f(t)\,\mathrm{e}^{\frac{-(x+a)t}{2}}\right)\mathrm{d}t$. $y = \dfrac{x+a}{2}$ est un réel supérieur à a, donc d'après la remarque précédente, il existe un réel M_x tel que $\forall t > 0$, $\left|f(t)\,\mathrm{e}^{\frac{-(x+a)t}{2}}\right| \leqslant M_x$, donc :
$\displaystyle\left|\int_0^A f(t)\,\mathrm{e}^{-x\,t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^A \left|f(t)\,\mathrm{e}^{-x\,t}\right|\,\mathrm{d}t \leqslant M_x \int_0^A \mathrm{e}^{\frac{-(x-a)t}{2}}\mathrm{d}t \leqslant \frac{2\,M_x}{x-a}$.
L'intégrale est absolument convergente, donc convergente.

2. $\mathcal{L}(h_\alpha)(x)$ est défini si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} h_\alpha(t)\,\mathrm{e}^{-t\,x}\,\mathrm{d}t$ converge.
Or pour $A > 0$, et $x \neq -\alpha$ $\displaystyle\int_0^A h_\alpha(t)\,\mathrm{e}^{-t\,x}\,\mathrm{d}t = \int_0^A \mathrm{e}^{-\alpha\,t}\,\mathrm{e}^{-t\,x}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x+\alpha}\left(1 - \mathrm{e}^{-(x+\alpha)\,A}\right)$ et pour $x = -\alpha$,
$\displaystyle\int_0^A h_\alpha(t)\,\mathrm{e}^{-t\,x}\,\mathrm{d}t = A$. L'intégrale converge si et seulement si $x+\alpha > 0$, donc $\mathcal{L}(h_\alpha)$ est définie sur $]-\alpha, +\infty[$ et

$$\boxed{\forall x \in]-\alpha, +\infty[,\ \mathcal{L}(h_\alpha)(x) = \frac{1}{x+\alpha}}$$

3. • Soit $k \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [k, k+1[$, $E(t) = k$ donc $\displaystyle\int_k^{k+1} E(t)\,\mathrm{e}^{-t\,x}\,\mathrm{d}t = \int_k^{k+1} k\,\mathrm{e}^{-t\,x}\,\mathrm{d}t$
Donc pour $x \neq 0$, $\displaystyle\int_k^{k+1} E(t)\,\mathrm{e}^{-t\,x}\,\mathrm{d}t = \frac{k}{x}\left(\mathrm{e}^{-k\,x} - \mathrm{e}^{-(k+1)\,x}\right) = \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x} \times k\,\mathrm{e}^{-k\,x}$
<u>Remarque</u> : pour $x = 0$, $\displaystyle\int_k^{k+1} E(t)\,\mathrm{e}^{-0t}\,\mathrm{d}t = k$
• Soit $A > 0$, notons $n = E(A)$; la fonction $t \mapsto E(t)\,\mathrm{e}^{-t\,x}$ est continue par morceaux et à valeurs positives sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}^+$, donc : $\displaystyle\int_0^n E(t)\,\mathrm{e}^{-t\,x}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^A E(t)\,\mathrm{e}^{-t\,x}\,\mathrm{d}t < \int_0^{n+1} E(t)\,\mathrm{e}^{-t\,x}\,\mathrm{d}t$.
Pour $x \neq 0$, $\displaystyle\int_0^n E(t)\,\mathrm{e}^{-t\,x}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} k\,\mathrm{e}^{-t\,x}\,\mathrm{d}t = \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}\sum_{k=0}^{n-1} k\,\mathrm{e}^{-k\,x}$
$\displaystyle\int_0^n E(t)\,\mathrm{e}^{-t\,x}\,\mathrm{d}t$, et bien sûr $\displaystyle\int_0^{n+1} E(t)\,\mathrm{e}^{-t\,x}\,\mathrm{d}t$, sont des sommes partielles d'une série géométrique dérivée de raison e^{-x}, donc convergent vers une même limite égale à $\dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x} \times \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)^2}$.
On peut remarquer que pour $x = 0$, $\displaystyle\int_0^n E(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n\,(n-1)}{2}$ donc l'intégrale diverge en $+\infty$ et $\mathcal{L}(E)$ n'est pas définie en 0.

$$\boxed{\text{Ainsi } \mathcal{L}(E) \text{ est définie sur }]0, +\infty[\text{ et } \forall x \in]0, +\infty[,\ \mathcal{L}(E)(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x\,(1-\mathrm{e}^{-x})} = \frac{1}{x\,(\mathrm{e}^{x}-1)}.}$$

4. (a) Si $x < 0$, alors $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-xt} = +\infty$, et si $x = 0$, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-xt} = 1$. Dans les deux cas $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-xt} = +\infty$ (ou 1 si $n = 0$ et $x = 0$) et l'intégrale diverge.

Soit $x > 0$: $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{e}^{-xt} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(t^{-n}\right)$, donc $f_n \in \mathcal{E}_0$.

D'après le résultat de la première question, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\, t^n \,\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{L}(f_n) \text{ est définie sur }]0,+\infty[}$$

(b) Soit $A > 0$, les fonctions f_n et $t \mapsto \mathrm{e}^{-xt}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, A]$, donc par intégration par partie :
$\displaystyle\int_0^A \mathrm{e}^{-xt}\, t^n \,\mathrm{d}t = \left[\frac{-\mathrm{e}^{-xt}\, t^n}{x}\right]_0^A + \frac{n}{x}\int_0^A \mathrm{e}^{-xt}\, t^{n-1} \,\mathrm{d}t = -A^n \mathrm{e}^{-xA} + \frac{n}{x}\int_0^A \mathrm{e}^{-xt}\, t^{n-1} \,\mathrm{d}t.$
Par passage à la limite lorsque $A \to +\infty$, $I_n(x) = \dfrac{n}{x}\, I_{n-1}(x)$

(c) On montre par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n(x) = \dfrac{n!}{x^n}\, I_0(x)$:
La formule est vraie de façon évidente pour $n = 0$; supposons la vérifiée pour une certaine valeur $n \geqslant 0$, on a $I_{n+1}(x) = \dfrac{n+1}{x}\, I_n(x) = \dfrac{n+1}{x} \times \dfrac{n!}{x^n}\, I_0(x) = \dfrac{(n+1)!}{x^{n+1}}\, I_0(x)$ donc la formule est héréditaire.
$I_0(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$ *(voir question 2 avec $\alpha = 0$)*, d'où $I_n(x) = \dfrac{n!}{x^n} \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{n!}{x^{n+1}}$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x > 0,\ I_n(x) = \frac{n!}{x^{n+1}}}$$

Partie II

1. (a) • Soit $f \in \mathcal{F}_a$: $\left(\frac{x+a}{2}\right) > a$ donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f'(t)\, \mathrm{e}^{-\left(\frac{x+a}{2}\right)t} = 0$; ainsi $\exists A > 0$ tel que $\forall x > A$, $\left|f'(t)\, \mathrm{e}^{-\left(\frac{x+a}{2}\right)t}\right| \leqslant 1$
• Soit $f \in \mathcal{F}_a$, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ donc on peut utiliser le théorème des accroissements finis sur $[A, t]$: il existe $c_t \in]A, t[$ tel que $f(t) - f(A) = (t-A)\, f'(c_t)$. D'où $f(t)\, \mathrm{e}^{-xt} = f(A)\, \mathrm{e}^{-xt} + (t-A)\, f'(c_t)\, \mathrm{e}^{-xt}$.
On écrit à nouveau *(voir partie 1)* $\mathrm{e}^{-xt} = \mathrm{e}^{-\left(\frac{x-a}{2}\right)t}\, \mathrm{e}^{-\left(\frac{x+a}{2}\right)t}$ donc pour $t \geqslant A$:
$\left|f(t)\, \mathrm{e}^{-xt}\right| = \left|f(A)\, \mathrm{e}^{-xt} + (t-A)\, f'(c_t)\, \mathrm{e}^{-xt}\right| \leqslant \left|f(A)\, \mathrm{e}^{-xt}\right| + \left|(t-A)\, \mathrm{e}^{-\left(\frac{x-a}{2}\right)t} \times f'(c_t)\, \mathrm{e}^{-\left(\frac{x+a}{2}\right)t}\right|$
$A < c_t < t$ donc pour tout $t > A$, $\left|f'(c_t)\, \mathrm{e}^{-\left(\frac{x+a}{2}\right)t}\right| \leqslant \left|f'(c_t)\, \mathrm{e}^{-\left(\frac{x+a}{2}\right)c_t}\right| \leqslant 1$;
$-\left(\frac{x-a}{2}\right) < 0$ donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} (t-A)\, \mathrm{e}^{-\left(\frac{x-a}{2}\right)t} = \lim_{t\to+\infty} t\, \mathrm{e}^{-\left(\frac{x-a}{2}\right)t} = 0$;
• Supposons $a \geqslant 0$: $f(A)$ est une constante donc $\forall x > a$, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(A)\, \mathrm{e}^{-xt} = 0$;
ainsi $\left|f(t)\, \mathrm{e}^{-xt}\right| \leqslant \left|f(A)\, \mathrm{e}^{-xt}\right| + \left|(t-A)\, \mathrm{e}^{-\left(\frac{x-a}{2}\right)t}\right|$ donc tend vers 0 lorsque $t \to +\infty$.
• Si par contre $a < 0$: on a bien $\forall x > 0$, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(A)\, \mathrm{e}^{-xt} = 0$ mais on ne peut rien conclure si $x \leqslant 0$.

(b) On en déduit que si $a \geqslant 0$, alors $f \in \mathcal{E}_a$ et si $a < 0$, alors $f \in \mathcal{E}_0$; en conclusion :

$$\boxed{a \geqslant 0 \Longrightarrow \mathcal{F}_a \subset \mathcal{E}_a \text{ et } a < 0 \Longrightarrow \mathcal{F}_a \subset \mathcal{E}_0}$$

2. D'après la question 1, $\mathcal{L}(f)$ est définie sur $]0, +\infty[$ si $a < 0$ et sur $]a, +\infty[$ si $a \geqslant 0$; on suppose donc de plus $x > 0$:
Soit $A > 0$, $= \displaystyle\int_0^A f'(t)\, \mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t = \left[f(t)\, \mathrm{e}^{-xt}\right]_0^A + x\int_0^A f(t)\, \mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t$. $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} f(A)\, \mathrm{e}^{-xA} = 0$ donc les intégrales des deux membres sont simultanément convergentes ou divergentes. Dans le cas où elles convergent, on obtient en faisant tendre A vers $+\infty$: $\mathcal{L}(f')(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t)\, \mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t = -f(0) + x\,\mathcal{L}(f)(x)$

3. (a) La fonction cos est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall x > 0$, $\left|\mathrm{e}^{-xt}\, \cos(t)\right| \leqslant \mathrm{e}^{-xt}$ tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$ donc $\cos \in \mathcal{E}_0$.

(b) $\mathcal{L}(\cos)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos t\, \mathrm{e}^{-xt} \,\mathrm{d}t$

$\displaystyle\int_0^A \cos(t)\, \mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t = \left[\sin(t)\, \mathrm{e}^{-xt}\right]_0^A + x\int_0^A \sin(t)\, \mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t = \left[\sin(t)\, \mathrm{e}^{-xt}\right]_0^A - \left[x\, \cos(t)\, \mathrm{e}^{-xt}\right]_0^A - x^2\int_0^A \cos(t)\, \mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t.$

Par passage à la limite lorsque $A \to +\infty$, $(x^2+1)\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t)\,\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t = \left[\sin(t)\,\mathrm{e}^{-xt} - x\,\cos(t)\,\mathrm{e}^{-xt}\right]_0^{+\infty} = x$

Donc $\forall x > 0,\ \mathcal{L}(\cos)(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

sin est la dérivée de cos donc $\forall x > 0,\ -\mathcal{L}(\sin)(x) = x\,\mathcal{L}(\cos)(x) - \cos(0) = x\,\dfrac{x}{x^2+1} - 1$

$$\boxed{\forall x > 0,\ \mathcal{L}(\cos)(x) = \frac{x}{x^2+1} \text{ et } \mathcal{L}(\sin)(x) = \frac{1}{x^2+1}}$$

4. (a) La formule établie à la question 3b donne en utilisant la transformée de Lagrange des deux membres :

- $\begin{cases} x\,\mathcal{L}(f)(x) - 2 &= -6\,\mathcal{L}(f)(x) + 9\,\mathcal{L}(g)(x) \\ x\,\mathcal{L}(g)(x) - 1 &= -4\,\mathcal{L}(f)(x) + 7\,\mathcal{L}(g)(x) \end{cases} \iff \begin{cases} (x+6)\,\mathcal{L}(f)(x) - 9\,\mathcal{L}(g)(x) &= 2 \\ 4\,\mathcal{L}(f)(x) + (x-7)\,\mathcal{L}(g)(x) &= 1 \end{cases}$

  $\begin{cases} \Big((x+6)(x-7)+36\Big)\mathcal{L}(f)(x) &= 2\,(x-7)+9 \\ \Big((x+6)(x-7)+36\Big)\mathcal{L}(g)(x) &= (x+6)-8 \end{cases}$ or $(x+6)(x-7)+36 = x^2-x-6 = (x-3)\,(x+2)$ d'où le résultat annoncé.

- On a $\dfrac{2\,x-5}{x^2-x-6} = \dfrac{1}{5\,(x-3)} + \dfrac{9}{5\,(x+2)},\ \dfrac{x-2}{x^2-x-6} = \dfrac{1}{5\,(x-3)} + \dfrac{4}{5\,(x+2)}$.

- Les valeurs possibles pour a sont par conséquent $\boxed{a \geqslant 3}$; par unicité et linéarité de la transformée de Lagrange et compte tenu du calcul de la question 2 de la partie 1, les seules solutions possibles de ce système sont : $f = \dfrac{1}{5}\,h_{-3} + \dfrac{9}{5}\,h_2$ et $g = \dfrac{1}{5}\,h_{-3} + \dfrac{4}{5}\,h_2$

(b) Il suffit de vérifier que les fonctions déterminées précédemment sont effectivement solution du système, ce qui se fait par calcul direct ; en conclusion, l'unique couple (f,g) de fonctions solution du système $(\mathcal{S})$ est donné par :

$$\boxed{f\ : x \mapsto \frac{1}{5}\,\mathrm{e}^{3\,x} + \frac{9}{5}\,\mathrm{e}^{-2\,x} \text{ et } g\ : x \mapsto \frac{1}{5}\,\mathrm{e}^{3\,x} + \frac{4}{5}\,\mathrm{e}^{-2\,x}}$$

Partie III

1. Supposons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge ; on a $\forall u > 0,\ F(u) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{u} f(t)\,\mathrm{d}t$ donc F est bien définie sur $[0,+\infty[$.

   Par définition $u \mapsto \displaystyle\int_0^{u} f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f ; $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est une constante réelle, donc $-F$ est une primitive de f sur $[0,+\infty[$.

2. Pour $t \geqslant 1$, $\left|\mathrm{e}^{-xt}\,f(t)\right| \leqslant |t\,f(t)|$ donc tend vers 0 lorsque $t \to +\infty$, donc $f \in \mathcal{E}_0$.
   Soient $A > 0$ et $x > 0$, les fonctions $t \longmapsto \mathrm{e}^{-tx}$ et $t \longmapsto -F\,(t)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,A]$, donc par intégration par partie :

   $$\int_0^A \mathrm{e}^{-tx} f(t)\,\mathrm{d}t = \Big[-\mathrm{e}^{-tx}\,F\,(t)\Big]_0^A - x\int_0^A \mathrm{e}^{-tx}\,F\,(t)\ \mathrm{d}t = F(0) - \mathrm{e}^{-Ax}\,F\,(A) - x\int_0^A \mathrm{e}^{-tx}\,F\,(t)\ \mathrm{d}t$$

   Or $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} F(A) = \lim_{A\to+\infty}\int_A^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ comme reste d'une intégrale convergente, donc par passage à la limite lorsque $A \to +\infty$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - x\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} F(t)\,\mathrm{d}t$

3. F tend vers 0 en $+\infty$ (vu à la question précédente) donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que $\forall t > A,\ |F(t)| \leqslant \varepsilon$.
   D'autre par F est bornée sur $[0,A]$ (en tant que fonction continue sur un segment), donc il existe $M > 0$ tel que $\forall t \in [0,A],\ |F(t)| \leqslant M$.

   $$\int_0^A \left|\mathrm{e}^{-tx} F(t)\right|\ \mathrm{d}t \leqslant M\int_0^A \mathrm{e}^{-tx}\ \mathrm{d}t = \frac{M\,(1-\mathrm{e}^{-A\,x})}{x} \quad ; \quad \int_A^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon\int_A^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\ \mathrm{d}t = \varepsilon\,\frac{\mathrm{e}^{-Ax}}{x}$$

   Ainsi, $\left|x\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} F(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant M\,(1-\mathrm{e}^{-A\,x}) + \varepsilon\,\mathrm{e}^{-Ax}$

Comme exp est continue en 0, $\lim_{x\to 0} 1-\mathrm{e}^{-A\,x}=0$, d'où $\lim_{x\to 0^+} x\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}F(t)\,\mathrm{d}t=0$

4. Les résultats des deux questions précédentes entrainent : $\lim_{x\to 0^+}\mathcal{L}(f)(x)=\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Partie IV

1. La fonction $t\mapsto \frac{1-\cos t}{t^2}$ est continue sur $[1,+\infty[$ et $\forall t\geqslant 1$, $\left|\dfrac{1-\cos t}{t^2}\right|\leqslant \dfrac{2}{t^2}$
Ainsi l'intégrale généralisée est absolument convergente, donc convergente.
2. Les fonctions $t\mapsto\frac{1}{t^2}$ et $t\mapsto \sin t$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1,+\infty[$ donc
$\forall A>1,\ \displaystyle\int_1^A\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_1^A+\int_1^A\frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$
$\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\frac{\cos A}{A}=0$, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t=\lim_{A\to+\infty}1-\cos 1-\int_1^A\frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t=1-\cos 1-\int_1^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$ et $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2}=\frac12$; de plus les fonctions $t\mapsto\dfrac{\sin t}{t}$ et $t\mapsto\dfrac{1-\cos t}{t^2}$ sont continues sur $]0,1]$ donc ces deux intégrales sont faussement impropres en 0, et par conséquent, convergentes.
4. Les calculs des deux questions précédentes permettent de conclure que
$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t+\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t+\int_1^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$
5. (a) Soit $x\in[0,+\infty[$; la fonction $t\mapsto\dfrac{\sin t}{t}\,\mathrm{e}^{-xt}$ est continue sur $[0,+\infty[$.
   • Pour $x=0$, on retrouve l'intégrale convergente de la question précédente, donc G est définie en 0.
   • Pour $x>0$, la fonction f définie par $f(t)=\frac{\sin t}{t}$ si $t>0$ et $f(0)=1$ est continue sur $[0,+\infty[$ et appartient à $\mathcal{E}_0$; par conséquent l'intégrale est convergente.
   On en déduit que G est définie au moins sur $[0,+\infty[$.
   (b) La fonction f est bornée sur $\mathbb{R}^+$ car pour $t\geqslant 1$, $\left|\dfrac{\sin t}{t}\right|\leqslant\dfrac1t\leqslant 1$ et pour $t\in[0,1]$ f est bornée en tant que fonction continue sur un segment *(en fait en appliquant le théorème des accroissements finis et en utilisant que $\forall t\in]0,1]$, $0\leqslant\cos t\leqslant 1$, on montre que $0<\sin t\leqslant t$ donc f est bien majorée par 1 sur $[0,1]$ également).*
   On a alors $|G(x)|\leqslant\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t=\frac1x$, donc par théorème d'encadrement $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}G(x)=0$.
   (c) En admettant le résultat énoncé, on a $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)=-\sin(t)\,\mathrm{e}^{-xt}$ donc $G'(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}-\sin(t)\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$
   D'après le calcul de la question 3 de la partie II, on a $\forall x>0,\ G'(x)=\dfrac{-1}{x^2+1}$
   (d) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t=G(0)$; or $G(x)-G(0)=\displaystyle\int_0^x G'(t)\,\mathrm{d}t=-\arctan x$
   $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}G(x)=0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$ donc par passage à la limite, $G(0)=\dfrac{\pi}{2}$.

Partie V

1. (a) Les fonctions $u\mapsto x-u$ et $u\mapsto\frac{\partial g}{\partial x}(u,t)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\alpha,+\infty[$ donc par intégration par partie :
   • $\displaystyle\int_{x_0}^x(x-u)\,\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(u,t)\,\mathrm{d}t=\left[(x-u)\,\frac{\partial g}{\partial x}(u,t)\right]_{x_0}^x-\int_{x_0}^x\frac{\partial g}{\partial x}(u,t)\,\mathrm{d}t$
   $\displaystyle\qquad=(x-x_0)\,\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,t)-\big(g(x,t)-g(x_0,t)\big)$ d'où la formule annoncée.

• $\forall u \in [\alpha, x]\,,\ \forall t \geqslant 0\,,\ (x-u)\,\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(u,t) = (x-u)\times t\,\sin(t)\,\mathrm{e}^{-ut}\,;\ |\ x-u| \leqslant |\ x-x_0|\,,\ 0 < \mathrm{e}^{-ut} \leqslant \mathrm{e}^{-\alpha\, t}$

donc $\left|\ (x-u)\,\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(u,t)\right| \leqslant |x-x_0|\,t\,\mathrm{e}^{-\alpha\, t}$

• Par intégration membre à membre de l'inégalité précédente, on obtient :

$\displaystyle\int_{x_0}^{x} \left|(x-u)\times \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(u,t)\right|\,\mathrm{d}u \leqslant \int_{x_0}^{x} |x-x_0|\ t\,e^{-t\alpha}\,\mathrm{d}u = (x-x_0)^2\ t\,e^{-t\alpha}$ puis

$$\left|g\,(x,t) - g\,(x_0,t) - \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,t)\ (x-x_0)\right| = \left|\int_{x_0}^{x} (x-u)\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(u,t)\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \int_{x_0}^{x} \left|(x-u)\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(u,t)\right|\ \mathrm{d}u$$

D'où l'inégalité demandée en utilisant la première formule.

(b) En intégrant l'inégalité précédente sur $\mathbb{R}^+$, on a

$$\int_0^{+\infty} \left|g\,(x,t) - g\,(x_0,t) - \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,t)\times(x-x_0)\right|\ dt \leqslant \int_0^{+\infty} (x-x_0)^2\ t\,e^{-t\alpha}\ dt = \frac{1}{\alpha^2}\times(x-x_0)^2$$

Or $G(x) - G(x_0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) - \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,t)\right)\,\mathrm{d}t$, donc

$$\left|G\,(x) - G\,(x_0) - (x-x_0)\int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^{+\infty}\left(g\,(x,t) - g\,(x_0,t) - \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,t)\times(x-x_0)\right)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{(x-x_0)^2}{\alpha^2}$$

D'où l'inégalité annoncée après division par $|x-x_0|$.

2. La définition du nombre dérivé en un point nous permet de conclure que

$$\forall x_0 > 0,\ G'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{G(x)-G(x_0)}{x-x_0} = \int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{x_0^2+1}$$

G est donc bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ comme annoncé, et la formule donnée en partie IV question 5c est confirmée.