Géométrie

Sauf indication contraire, tous les calculs sont faits dans l'espace, les calculs dans le plan pouvant s'en déduire de façon très simple.

1 Géométrie affine

1.1 Repère d'un espace affine

1.1.1 Bases

L'espace et le plan peuvent être munis de bases composées de 2 ou trois vecteurs selon la dimension. On notera $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ ou $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ selon le cas. On montre que tout vecteur du plan (respectivement de l'espace) peut se décomposer de façon unique sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs de la base, c'est à dire que pour un vecteur donné $\vec{V}$, il existe un unique couple de réels (a, b) (respectivement un unique triplet de réels (a, b, c)) tels que $\vec{V} = a\,\vec{e_1} + b\,\vec{e_2}$ (respectivement $\vec{V} = a\,\vec{e_1} + b\,\vec{e_2} + c\,\vec{e_3}$). Ces réels sont appelés les *composantes* du vecteur $\vec{V}$ dans la base $\mathcal{B}$.

- Deux vecteurs ne sont pas colinéaires si et seulement si ils forment une famille libre.
- Par conséquent, toute base du plan est un couple de vecteurs non colinéaires (et réciproquement).
- Trois vecteurs ne sont pas coplanaires si et seulement si ils forment une famille libre.
- On en déduit de même que toute base de l'espace est un triplet de vecteurs non coplanaires (et réciproquement).

1.1.2 Définition d'un repère

On s'intéresse aux espaces vectoriels $(\mathbb{R}^2, +, .)$ et $(\mathbb{R}^3, +, .)$ et aux espaces affines associés $\mathcal{A}_2$ et $\mathcal{A}_3$.

Les éléments de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$ sont des *vecteurs* ayant des *composantes* dans une base de l'espace vectoriel correspondant.

Les éléments de $\mathcal{A}_2$ et $\mathcal{A}_3$ sont des *points* ayant des *coordonnées* dans un repère de l'espace affine correspondant.

Un repère est la donnée d'un point Ω de $\mathcal{A}_2$ ou $\mathcal{A}_3$ et d'une base $\mathcal{B}$ de l'espace $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

L'espace affine associé à un espace vectoriel s'obtient donc à partir de l'espace vectoriel en choisissant un point origine ; les coordonnées d'un point M dans le repère$(\Omega, \mathcal{B})$ sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Remarque 1.1. *L'unicité de l'expression d'un vecteur en fonction des vecteurs d'une base entraîne l'unicité des coordonnées d'un point dans un repère donné.*

Ceci se traduit par : Si $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ (on se place dans $\mathbb{R}^3$), alors

$$f : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathcal{A}_3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & M \text{ défini par } \overrightarrow{\Omega M} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \end{array} \right. \quad \text{est une bijection}.$$

On a une bijection similaire entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{A}_2$.

1.1.3 Changement de repère

On considère deux repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ tels que :

$\mathcal{R} = (\Omega, \mathcal{B})$ avec $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et $\mathcal{R}' = (A, \mathcal{B}')$ avec $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ et $A(x_o, y_o, z_0)$ dans le repère $\mathcal{R}$.

$\mathcal{R}$ sera appelé l'ancien repère et $\mathcal{R}'$ le nouveau repère, on notera P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

$P : \begin{array}{c} \\ \vec{\imath} \\ \vec{\jmath} \\ \vec{k} \end{array} \begin{array}{c} \vec{u}\ \vec{v}\ \vec{w} \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array}$ soit M un point de $\mathcal{A}_3$, on note (x, y, z) les coordonnées de M dans le repère $\mathcal{R}$, $(\overrightarrow{\Omega M} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k})$ et (x', y', z') les coordonnées de M dans le repère $\mathcal{R}'$ $(\overrightarrow{AM} = x'\vec{u} + y'\vec{v} + z'\vec{w})$

$\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{AM}$, donc $(x - x_o)\vec{\imath} + (y - y_o)\vec{\jmath} + (z - z_o)\vec{k} = x'\vec{u} + y'\vec{v} + z'\vec{w}$

d'où $\begin{pmatrix} x - x_o \\ y - y_o \\ z - z_o \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

On obtient donc les coordonnées dans l'ancien repère en fonction de celles dans le nouveau repère ; pour avoir la relation en sens inverse, on doit donc déterminer P^{-1}.

1.2 Equations d'une droite, d'un plan

Une droite (D) est définie par un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$, ou bien par deux points distincts A et B ; on se ramène alors au cas précédent en posant $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

Définition 1.2. *On appelle droite affine passant par un point A de vecteur directeur $\vec{u}(\neq \vec{0})$, l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires ; $\vec{u}$ étant non nul, la colinéarité de $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ équivaut à : $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ / $\overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u}$.*

$(D) = \{M \in \mathcal{A}_2$ ou $\mathcal{A}_3$, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{AM} = \lambda.\vec{u}\}$.

1.2.1 Droites du plan affine

Équation paramétrique : On pose $A(x_0; y_0)$, $M(x; y)$ et $\vec{u}\binom{a}{b}$. La colinéarité de $\overrightarrow{AM}$ et de $\vec{u}$ s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & x_0 + \lambda a \\ y & = & y_0 + \lambda b \end{array}\right.$$

Équation cartésienne : Avec les mêmes notations , on obtient en éliminant λ entre les deux équations du système : $b\,x - a\,y \;=\; b\,x_0 - a\,y_0$. La forme générale d'une équation cartésienne d'une droite (D) de vecteur directeur $\vec{u}$ est donc $b\,x - a\,y \;= c$.

Deux droites distinctes du plan sont soit sécantes (un point d'intersection), soit parallèles (intersection vide).

1.2.2 Plans de l'espace affine

Un plan (P) est défini par un point A et deux vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires, ou bien par trois points non alignés A, B et C ; on se ramène alors au cas précédent en posant $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ (en effet, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ forment alors une famille libre).

Définition 1.3. *(dans $\mathcal{A}_3$ uniquement) On appelle plan affine passant par un point A et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires ; $\vec{u}$ et $\vec{v}$ n'étant pas colinéaires, la coplanarité équivaut à : $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{AM} = \lambda.\vec{u} + \mu.\vec{v}$.*

$(P) = \{M \in \mathcal{A}_3$, $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{AM} = \lambda.\vec{u} + \mu.\vec{v}\}$.

Équation paramétrique : On pose $A(x_0, y_0, z_0)$, $M(x, y, z)$, $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}$ La coplanarité de $\overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & x_0 + \lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 \\ y & = & y_0 + \lambda\alpha_2 + \mu\beta_2 \\ z & = & z_0 + \lambda\alpha_3 + \mu\beta_3 \end{array}\right.$$

Équation cartésienne : Avec les mêmes notations, on obtient en éliminant λ et μ entre les équations du système : $(x - x_0)(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) + (y - y_0)(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3) + (z - z_0)(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) = 0$.

En anticipant un peu sur le cours de géométrie euclidienne, et en se plaçant dans une base orthonormée, on peut remarquer que le vecteur $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ normal à (P), n'est autre que $\begin{pmatrix}\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2\\ \alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3\\ \alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\end{pmatrix}$; on obtient en posant

$$\left\{\begin{array}{lcl} a & = & \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 \\ b & = & \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 \\ c & = & \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \end{array}\right. \qquad \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0 = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)$$

La forme générale d'une équation cartésienne d'un plan affine (P) de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ est donc $ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0 = d$.

L'intersection de deux plans distincts de l'espace est soit une droite (plans sécants), soit vide (plans parallèles) ; ce n'est jamais un point.

1.2.3 Droites de l'espace affine

Équation paramétrique : La définition d'une droite de l'espace (D) passant par un point $A(x_0; y_0; z_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ est la même que celle d'une droite du plan, à savoir

$(D) = \{M \in \mathcal{A}_3$, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ / $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u}\}$, ce qui s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & x_0 + \lambda\alpha \\ y & = & y_0 + \lambda\beta \\ z & = & z_0 + \lambda\gamma \end{array}\right.$$

Équation cartésienne : Si l'on élimine le paramètre λ, on constate que l'on obtient un système de deux équations cartésiennes, ce qui définit la droite (D) comme l'intersection de deux plans affines. Il n'y a pas de façon privilégiée ou "canonique" de déterminer une équation cartésienne pour une droite de l'espace.

Deux droites distinctes de l'espace peuvent être sécantes (intersection un point), parallèles ou bien non coplanaires.

Propriété 1.4. *Soient $D(A, \vec{u})$ et $\Delta(B, \vec{v})$ deux droites de l'espace ; elles sont coplanaires si et seulement si $(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v})$ est une famille liée.*

Démonstration : soit (D) et (Δ) sont parallèles – alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires – soit elles sont sécantes : elles engendrent alors un plan affine P, dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (qui dans ce cas forment une famille libre). Les points A et B qui appartiennent à ces droites sont des points de P, donc le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

1.2.4 Droites, plans parallèles

Définitions 1.5.
- *Deux droites sont parallèles si elles ont un même vecteur directeur (ou, ce qui revient au même, la même droite vectorielle associée).*
- *De même, deux plans sont parallèles s'ils ont le même plan vectoriel associé.*
- *Une droite (D) est parallèle à un plan (P) si sa droite vectorielle direction est contenu dans le plan directeur associé à (P).*

Remarques 1.6.
- *Une droite est donc parallèle à elle même, de même pour un plan.*
- *Deux droites parallèles distinctes ont une intersection vide, de même pour deux plans parallèles distincts.*
- *L'intersection d'un plan et d'une droite parallèles est soit vide, soit égale à la droite.*
- *Deux droites du plan sont soit sécantes, soit parallèles.*
- *Ce n'est pas le cas dans l'espace, on peut avoir des droites non coplanaires.*
- *Deux plans sont, soit sécants selon une droite, soit parallèles.*

2 Géométrie affine euclidienne

2.1 Produit scalaire

2.1.1 Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace , on définit le *produit scalaire* de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ noté $\vec{u}.\vec{v}$ par :
- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, on considère une droite (AB) telle que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et on définit le point C par $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. On considère C' , le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) et on pose $\vec{u}.\vec{v} = \overline{AB}.\overline{AC'}$. Pour que la définition soit cohérente, il faut prouver que la valeur du produit scalaire ainsi défini ne dépend pas du choix des points A , B et C.

2.1.2 Propriétés du produit scalaire

1. C'est une forme bilinéaire symétrique à savoir :
   - $\forall(\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3,\ \vec{u}.\vec{v} \in \mathbb{K}$
   - $\forall(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in (\mathbb{R}^3)^3,\ \forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ (\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}).\vec{w} = \lambda(\vec{u}.\vec{w}) + \mu(\vec{v}.\vec{w})$ (linéarité par rapport à la première variable).
     Autrement dit, $\varphi_{\vec{v}} : \vec{u} \longmapsto \vec{u}.\vec{v}$ est une forme linéaire dont le noyau est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à $\vec{u}$; si $\vec{u} \neq \vec{0}$, alors c'est une droite ou un plan vectoriel et $\varphi_{\vec{v}}$ est surjective.
     La linéarité de $\varphi_{\vec{v}}$ découle de ce que la projection orthogonale sur la droite engendrée par $\vec{v}$ est une application linéaire ; on prend ensuite la mesure algébrique et on fait le produit par la mesure algébrique de $\vec{u}$.
   - $\forall(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in (\mathbb{R}^3)^3,\ \forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \vec{u}.(\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \lambda(\vec{u}.\vec{v}) + \mu(\vec{u}.\vec{w})$ (linéarité par rapport à la deuxième variable).
   - $\forall(\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3,\ \vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ (symétrie)

2. $\vec{u} \longmapsto \sqrt{\vec{u}.\vec{u}} = ||\vec{u}||$ est une norme dite *euclidienne* , c'est à dire que :
   – $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3$, $||\vec{u}|| \geqslant 0$ et $||\vec{u}|| = 0 \Longleftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.
   – $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $||\lambda\vec{u}|| = |\lambda| \times ||\vec{u}||$.
   – $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $||\vec{u} + \vec{v}|| \leqslant ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$ (Inégalité triangulaire ou de Minkovski).
3. De plus , on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz : (vérifiée uniquement dans le cas d'une norme euclidienne).
   $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $|\vec{u}.\vec{v}| \leqslant ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$ avec $|\vec{u}.\vec{v}| = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \Longleftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires .

2.1.3 Relations entre norme et produit scalaire

1. $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $||\vec{u} + \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$.
2. $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $||\vec{u} - \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - 2\vec{u}.\vec{v}$.
3. $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $||\vec{u} + \vec{v}||^2 + ||\vec{u} - \vec{v}||^2 = 2(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2)$ (relation du parallélogramme).
4. $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 = \frac{1}{2}||\vec{u} - \vec{v}||^2 + 2||\frac{\vec{u}+\vec{v}}{2}||^2$ (théorème de la médiane).

2.1.4 Définition du cosinus

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls ; l'angle géométrique $(\vec{u}, \vec{v})$ est défini par son cosinus par :
$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||}$

Remarque 2.1. *Les propriétés précédentes permettent d'établir que le cosinus est un réel appartenant à* $[-1\,,\,1]$*, que* $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos(\vec{v}, \vec{u})$ *et que l'angle ne dépend pas de la norme des vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$*.*

2.1.5 Orthogonalité

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$ (on note $\vec{u} \perp \vec{v}$). En particulier , le vecteur nul $\vec{0}$ est orthogonal à tout vecteur.

Théorème 2.2 (de Pythagore)**.** $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \;/\; \vec{u} \perp \vec{v}$, $||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 = ||\vec{u} + \vec{v}||^2$.

2.1.6 Expression dans le cas d'une base orthonormée

Soient $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base quelconque, $\vec{u} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\,\vec{\imath} + y'\,\vec{\jmath} + z'\,\vec{k}$.
Alors $\vec{u}.\vec{v} = x\,x'||\vec{\imath}||^2 + y\,y'||\vec{\jmath}||^2 + z\,z'||\vec{k}||^2 + (x\,y' + y\,x')\,\vec{\imath}.\vec{\jmath} + (x\,z' + z\,x')\,\vec{\imath}.\vec{k} + (y\,z' + z\,y')\,\vec{\jmath}.\vec{k}$
Si $\mathcal{B}$ est orthonormée, alors $\vec{\imath}.\vec{\imath} = \vec{\jmath}.\vec{\jmath} = \vec{k}.\vec{k} = 1$ et $\vec{\imath}.\vec{\jmath} = \vec{\imath}.\vec{k} = \vec{\jmath}.\vec{k} = 0$ donc $\vec{u}.\vec{v} = x\,x' + y\,y' + z\,z'$.

2.1.7 Utilisations du produit scalaire

1. **Equation cartésienne d'un plan dans l'espace ou d'une droite dans le plan :**
   On peut également définir une droite (D) par un point $B(x_0; y_0)$ et un vecteur normal $\vec{n}\binom{\gamma}{\delta}$. (D) est alors l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $\overrightarrow{BM}.\vec{n} = 0$, ce qui donne $(x - x_0)\gamma + (y - y_0)\delta = 0$ ou encore $x\gamma + y\delta = x_0\gamma + y_0\delta = c$.
   Si l'on remarque que le vecteur $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ normal à (P) , n'est autre que $\begin{pmatrix} \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 \\ \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 \\ \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \end{pmatrix}$, on obtient en posant
   $\left\{\begin{array}{lcl} a & = & \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 \\ b & = & \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 \\ c & = & \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \end{array}\right.$ $\qquad \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0 = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)$.
   Un plan affine (P) de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ a donc une équation cartésienne de la forme $a\,x + b\,y + c\,z = a\,x_0 + b\,y_0 + c\,z_0 = d$.
   Remarques :
   – Une droite du plan ou un plan de l'espace peut être vu comme une ligne de niveau de l'application $M \longmapsto \vec{u}.\overrightarrow{AM}$ où $\vec{u}$ est un vecteur orthogonal à la droite ou au plan (en particulier lorsque $\vec{u}.\overrightarrow{AM} = 0$, il s'agit du plan ou de la droite passant par A et orthogonal à $\vec{u}$).
   – L'application $M \longmapsto MA^2 - MB^2$ peut s'écrire également $M \longmapsto 2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}$, en posant $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB}$ et $A = I$, on est ramené au cas précédent.

2. **Orthogonalité de deux droites, d'une droite et d'un plan :**
   – Deux droites du plan ou de l'espace sont orthogonales si et seulement si leurs vecteurs directeurs le sont, c'est à dire si leur produit scalaire est nul.
   Deux droites orthogonales peuvent être sécantes en un point (elles sont alors perpendiculaires) ou non coplanaires (dans ce cas leur intersection est vide).
   – Une droite (D) et un plan (P) de l'espace sont orthogonaux si et seulement si un vecteur directeur de (D) est orthogonal aux deux vecteurs d'une base de (P), et donc à tout vecteur directeur de (P).
   – Deux plans (P) et (P') sont orthogonaux si et seulement si un vecteur normal à (P) est orthogonal à un vecteur normal à (P').
3. **Calcul d'un angle géométrique, d'une distance**
4. **Equation d'un cercle ou d'une sphère :**
   Un cercle ou une sphère est défini par son centre Ω et son rayon R, c'est l'ensemble des points M pour lesquels $\Omega M = R$.

   Remarques 2.3.
   – *Un cercle du plan ou une sphère de l'espace peut s'obtenir comme ligne de niveau de l'application* $M \longmapsto \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}$ *ou de* $M \longmapsto MC^2 + MD^2$.
   – *Si* I *et* J *sont les milieux de* $[AB]$ *et* $[CD]$, *alors* $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + IA^2$ *et* $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = MJ^2 - JA^2$, *on a donc un cercle ou une sphère de centre* I *ou* J.
   – *L'ensemble des points* M *pour lesquels* $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$ *est le cercle ou la sphère de diamètre* $[AB]$.

2.2 Produit vectoriel

2.2.1 Orientation

2.2.2 Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace , on définit le *produit vectoriel* de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ par :
– Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires , alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$
– Sinon , on considère le plan engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$; $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est le vecteur tel que la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ soit directe et dont la norme vaut $||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$.

2.2.3 Propriétés

1. C'est une application vectorielle bilinéaire alternée , à savoir :
   – $\forall(\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $\vec{u} \wedge \vec{v} \in \mathbb{R}^3$
   – $\forall(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) \wedge \vec{w} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{w}) + \mu(\vec{v} \wedge \vec{w})$
   Autrement dit, $\vec{u} \longmapsto \vec{u} \wedge \vec{v}$ est une application linéaire dont le noyau est Vect$< \vec{u} >$ lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et l'image le plan vectoriel orthogonal à $\vec{u}$.
   – $\forall(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\vec{u} \wedge (\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}) + \mu(\vec{u} \wedge \vec{w})$ (linéarité par rapport à la deuxième variable).
   – $\forall(\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$ (antisymétrie)
2. $||\vec{u} \wedge \vec{v}||$ est l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$; en particulier, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Longleftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
3. Expression dans le cas d'une base orthonormée directe : Soit $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base orthonormée directe, $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{k}$.
   Alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = (yz' - zy')\vec{\imath} + (zx' - xz')\vec{\jmath} + (xy' - yx')\vec{k}$ car $\vec{\imath} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$ et $\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k}$, $\vec{\jmath} \wedge \vec{k} = \vec{\imath}$ et $\vec{k} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath}$.
4. Formule du double produit vectoriel : $\forall(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u}.\vec{w})\vec{v} - (\vec{u}.\vec{v})\vec{w}$
5. Identité de Lagrange : $\forall(\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $||\vec{u} \wedge \vec{v}||^2 + (\vec{u}.\vec{v})^2 = ||\vec{u}||^2||\vec{v}||^2$

2.2.4 Utilisations du produit vectoriel

– **Prouver une colinéarité ou un alignement**
– **Trouver un vecteur normal à un plan ou un plan normal à une droite :**
Si (P) passe par le point A et est dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, alors $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur normal à (P) donc $M \in (P) \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM}.(\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0$.
De même, si (D) passe par le point A et est dirigée par le vecteur $\vec{u}$, $M \in (D) \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \vec{0}$.

- **Calculer une aire**
- Une application du produit vectoriel en physique est la définition du moment d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ par rapport à un point O : $\vec{M}_{\overrightarrow{AB}/O} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}$. $\vec{M}_{\overrightarrow{AB}/O}$ est donc un vecteur perpendiculaire au plan contenant $\overrightarrow{AB}$ et O, $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}, \vec{M}_{\overrightarrow{AB}/O}$ est un trièdre direct et $||\vec{M}_{\overrightarrow{AB}/O}|| = AB.OA.\sin\theta$ (θ est l'angle entre $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{AB}$). Or, en prenant $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$, on obtient $||\vec{M}_{\overrightarrow{AB}/O}|| = AB.OA.\cos\alpha$ ($OA.\cos\alpha = OH$ étant la distance de O à la droite (AB)).

2.3 Projection orthogonale sur une droite , sur un plan

Soit M un point, son projeté orthogonal H sur une droite (resp. un plan) est le point qui réalise la plus petite distance de M à un point quelconque de la droite (resp. du plan).

On l'obtient à l'intersection de D ou P et de la perpendiculaire à D ou P passant par M.

Pour déterminer ses coordonnées, on écrit les deux conditions :
- $H \in D$ ou P.
- $\overrightarrow{MH} \perp \vec{u}$, si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de D, ou bien
- $\overrightarrow{MH} \parallel \vec{n}$, si $\vec{n}$ est un vecteur normal à P.

2.3.1 Distance d'un point à une droite dans le plan

Projection orthogonale : Soit (D) une droite d'équation $ax + by + c = 0$ et $M_0(x_0, y_0)$ un point du plan. Soit $H(X, Y)$ le projeté orthogonal de M_0 sur D.
- $H \in D\ :\ aX + bY + c = 0$
- $\overrightarrow{M_0H} \perp D\ :\ \begin{vmatrix} X - x_o & a \\ Y - y_0 & b \end{vmatrix} = 0$ Donc $X = \dfrac{b^2x_0 - aby_0 - ac}{a^2 + b^2}$ et $Y = \dfrac{-abx_0 + a^2y_0 - bc}{a^2 + b^2}$

Distance de M_0 à D : $d(M_0, D) = M_0H = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

En effet, $M_0H = |\overrightarrow{M_0H}.\vec{u}|$ où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire normal à (D) et si M est un point quelconque de (D), alors on vérifie que $\overrightarrow{M_0H}.\vec{u} = \overrightarrow{M_0M}.\vec{u}$, donc $d(M_0, D) = |\overrightarrow{M_0M}.\vec{u}|$ pour M un point quelconque de D.

2.3.2 Distance d'un point à un plan

Projection orthogonale : Soit (P) un plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point de l'espace. Soit $H(X, Y, Z)$ le projeté orthogonal de M_0 sur P.
- $H \in P\ :\ aX + bY + cZ + d = 0$
- $\overrightarrow{M_0H} \perp P\ :\ \exists\lambda \in \mathbb{R} \,/\, (X = x_0 + \lambda a\,, Y = y_0 + \lambda b\,, Z = z_0 + \lambda c)$

  Donc $X = x_0 - \dfrac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}a$, $Y = y_0 - \dfrac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}b$ et $Z = z_0 - \dfrac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}c$

Distance de M_0 à P : $d(M_0, P) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

En effet, $M_0H = |\overrightarrow{M_0H}.\vec{n}|$ où $\vec{n}$ est un vecteur unitaire normal à P et si M est un point quelconque de P, alors on vérifie que $\overrightarrow{M_0H}.\vec{n} = \overrightarrow{M_0M}.\vec{n}$, donc $d(M_0, P) = |\overrightarrow{M_0M}.\vec{n}|$ pour M un point quelconque de P.

2.3.3 Distance d'un point à une droite dans l'espace

Soient M_0 un point, D une droite de l'espace, A un point de D et $\vec{u}$ un vecteur directeur de D. Soit $H(X, Y)$ le projeté orthogonal de M_0 sur D ; on a :

$\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM_0} = \vec{u} \wedge (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM_0}) = \vec{u} \wedge \overrightarrow{HM_0}$ et comme $\overrightarrow{HM_0} \perp \vec{u}$, $||\vec{u} \wedge \overrightarrow{HM_0}|| = ||\vec{u}||\ ||\overrightarrow{HM_0}||$ donc $d(M_0, D) = ||\overrightarrow{HM_0}|| = \dfrac{||\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM_0}||}{||\vec{u}||}$

2.3.4 Distance de deux droites de l'espace – perpendiculaire commune

1. **Existence d'une perpendiculaire commune :** Soient D_1 passant par A, dirigée par $\vec{u}$, et D_2 passant par B et dirigée par $\vec{v}$. On suppose que D_1 et D_2 ne sont pas coplanaires donc entre autres, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

   On considère les plans P et P' définis par :
   - P passe par A et est dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v}$ *(donc $D_1 \subset P$).*

– P' passe par B et est dirigé par $\vec{v}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v}$ *(donc $D_2 \subset P'$).*

$P \cap P'$ est une droite Δ, dirigée par $\vec{u} \wedge \vec{v}$ donc non parallèle à D_1 et à D_2. Δ et D_1 sont sécantes en H_1 car elles appartiennent au même plan (P) et ne sont pas parallèles. De même, Δ et D_1 sont sécantes en H_2, donc Δ est la perpendiculaire commune à D_1 et D_2 cherchée.

2. **Equation de la perpendiculaire commune :**
   On écrit que Δ est dirigée par $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et rencontre D_1 et D_2.
3. **Distance de deux droites :**
   Définition 2.4. *Soient D_1 et D_2 2 droites, la distance $d(D_1, D_2)$ est définie comme la valeur minimale des distances M_1M_2 où M_1 et M_2 décrivent respectivement les droites D_1 et D_2.*

   Pour deux droites D_1 et D_2 non coplanaires, la distance $d(D_1, D_2)$ est la distance H_1H_2 où H_1 et H_2 sont les points d'intersections de la perpendiculaire commune (Δ) à (D_1) et (D_2) respectivement. En effet, si M_1 est un point quelconque de (D_1) et M_2 un point quelconque de (D_2), on calcule la distance M_1M_2 :

   $$\begin{aligned}(M_1M_2)^2 &= \overrightarrow{M_1M_2}.\overrightarrow{M_1M_2} = (\overrightarrow{M_1H_1} + \overrightarrow{H_1H_2} + \overrightarrow{H_2M_2})^2 \\ &= (M_1H_1)^2 + (H_1H_2)^2 + (H_2M_2)^2 + 2\overrightarrow{M_1H_1}.\overrightarrow{H_1H_2} + 2\overrightarrow{H_1H_2}.\overrightarrow{H_2M_2} + 2\overrightarrow{M_1H_1}.\overrightarrow{H_2M_2}. \\ &= (M_1H_1)^2 + (H_1H_2)^2 + (H_2M_2)^2 + 2\overrightarrow{M_1H_1}.\overrightarrow{H_2M_2} \text{ (car } \overrightarrow{M_1H_1} \perp \overrightarrow{H_1H_2} \text{ et } \overrightarrow{H_2M_2} \perp \overrightarrow{H_1H_2}) \\ &= (H_1H_2)^2 + (\overrightarrow{M_1H_1} + \overrightarrow{H_2M_2})^2\end{aligned}$$

   Donc $(M_1M_2)^2 \geqslant (H_1H_2)^2$.

   On a $H_1H_2 = \dfrac{\left|\overrightarrow{H_1H_2}.(\vec{u} \wedge \vec{v})\right|}{||\vec{u} \wedge \vec{v}||}$ et on vérifie que pour M_1 et M_2 des points quelconques de (D_1) et (D_2) : $\left|\overrightarrow{M_1M_2}.(\vec{u} \wedge \vec{v})\right| = |\overrightarrow{H_1H_2}.(\vec{u} \wedge \vec{v})|$ donc le calcul de la distance ne nécessite pas de connaître H_1 et H_2.