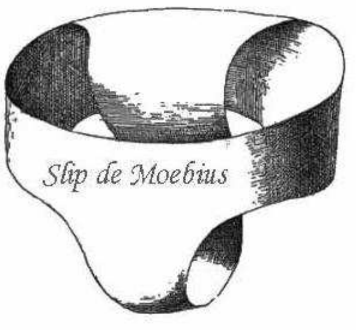
Vingt-troisième Leçon



SECTIONS PLANES DE SURFACE

Résumé
Pour la dernière, nous allons découvrir les fonctions de deux variables réelles. En gagnant une variable, la représentation graphique gagne aussi une dimension pour devenir une surface. Mais n'ayez pas peur ! Le contenu reste modeste : nous ne ferons qu'effleurer les problèmes...enfin presque, vous commencez à être habitué(e)s.

I - Fonctions de deux variables

a. Déjà vu...

Mathémator : Avant de nous quitter, découvrons ensemble une dernière notion mathématique : il sera ensuite temps pour vous de voler de vos propres ailes.

Téhessin : Quel déchirement œdipien !

Mathémator : J'en pleure d'avance...Bon, souvenez-vous, vous étiez à l'école primaire et vous découvriez l'aire d'un rectangle.

Téhessin : Longueur fois largeur !

Mathémator : Impressionnant ! D'autant plus que vous travailliez déjà à cette heureuse époque avec une fonction de deux variables réelles que votre instituteur(trice) vous a peut-être introduit de la sorte :

$$\mathscr{A} : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\ell,\mathrm{L}) \longmapsto \mathscr{A}(\ell,\mathrm{L}) = \ell \times \mathrm{L} \end{array}$$

Téhessin : Je ne me rappelle pas avoir rencontré cette notation en CE2, mais je crois comprendre que nous parlons en fait de fonctions qui dépendent de deux variables et qui renvoient un nombre réel.

Mathémator : Il ne faut pas être si restrictif. Il peut exister des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^{32}$, d'ailleurs de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ aussi, et plus généralement de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, avec n et p des entiers naturels. Malgré tout, nous n'aborderons cette année que les fonctions de deux variables réelles à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Allez, trois autres petits exemples. Considérez deux résistances montées en parallèle : quelle est la résistance équivalente ?

Téhessin : Je sais que $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{\mathrm{R}_1} + \dfrac{1}{\mathrm{R}_2}$.

Mathémator : On obtient donc facilement une fonction r dépendant des deux variables R_1 et R_2

$$r : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathrm{R}_1,\mathrm{R}_2) \longmapsto r(\mathrm{R}_1,\mathrm{R}_2) = \dfrac{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}{\mathrm{R}_1+\mathrm{R}_2} \end{array}$$

Enfin, un dernier exemple physique : deux objets de masses respectives m_1 et m_2 distants de d exercent une force gravitationnelle d'intensité $\mathrm{G}\dfrac{m_1 m_2}{d^2}$.

Téhessin : Il y a plus de deux variables : m_1, m_2 et d, car je sais que G est une constante.

Mathémator : Pas de précipitation Téhessin ! Je ne vous ai pas précisé quelle fonction nous allions étudier. Nous allons considérer ici que la distance est constante et que nous allons faire varier les masses. D'ailleurs, pour faciliter notre tache, nous allons noter les *variables* de manière conventionnelle par x et y pour mieux les distinguer des *paramètres* :

$$\mathscr{F} : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \mathscr{F}(x,y) = \mathrm{G}\dfrac{xy}{d^2} \end{array}$$

Mais trêve de physique : retournons en maternelle

$$\mathscr{S} : \begin{array}{l} \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N} \\ (x,y) \mapsto \mathscr{S}(x,y) = x+y \end{array}$$

Téhessin : La formulation est un peu déroutante, mais je crois comprendre que cette fonction n'est autre que la somme de deux entiers.

Mathémator : Je vous laisse le soin de calculer quelques images : $\mathscr{S}(3,2)$, $\mathscr{S}(28,4)$, etc. et d'imaginer d'autres fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ que vous avez rencontré au cours de votre brillante carrière.

Téhessin : Et j'imagine que nous allons calculer dérivées et limites pour finir par tracer les représentations graphiques de ces fonctions.

Mathémator : Pas si vite ! Les problèmes de dérivation et de limites deviennent très vite compliqués pour les fonctions de deux variables, c'est pourquoi nous ne les étudierons pas cette année. Sachez au moins que, par exemple, une fonction peut être « dérivable » selon x et selon y sur un « intervalle » et pourtant ne pas être continue en certains points. Cela trouble beaucoup d'étudiants car ils abordent l'étude des fonctions de deux variables sans intuition géométrique. Nous allons pour notre part adopter une toute autre démarche : nous allons nous contenter d'étudier « géométriquement » ces fonctions en espérant que vous garderez ces images en tête l'année prochaine.

En attendant, voici un petit exercice pour vous montrer que vous savez de quoi nous allons parler..

b. Lignes de niveaux sur une carte

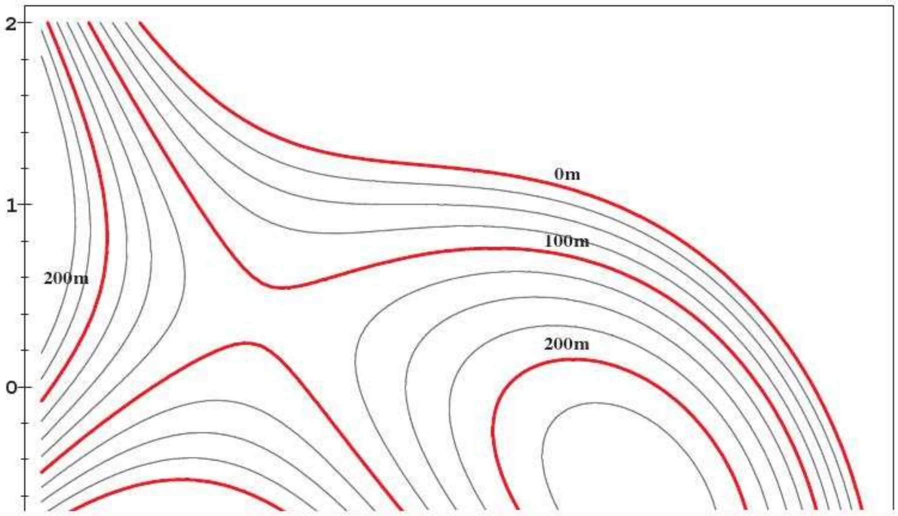
La figure ci-dessous est une carte du relief d'une presqu'île : le contour extérieur est la ligne de niveau 0 (bord de mer). L'équidistance des lignes de niveau est de 25 mètres.

Partie expérimentale

1. Un skieur de fond perdu dans le brouillard s'arrête, les skis bien horizontaux pour ne pas glisser, et cherche à se repérer à l'aide de son altimètre et de sa boussole. Il voit qu'il se trouve à 100 mètres d'altitude, avec ses skis orientés droit vers l'est. La pente est descendante vers sa gauche. Quelles est sa position sur la carte ?[a]
2. Le skieur décide de continuer son chemin à la boussole, droit vers l'est, jusqu'à atteindre la mer. Dessinez le profil du relief le long de l'itinéraire qui l'attend, en évaluant les dénivelés successifs.

---

[a] Deux positions possibles


2
1
0
0m
100m
200m
200m