CAML

5 - Logique propositionnelle

http://tsi.tuxfamily.org/OCaml

Louis THUILLIER Lycée

21 mars 2024

Vocabulaire

Soit $\mathcal{X}$ un ensemble au plus dénombrable (souvent fini dans nos exemples) d'éléments appelés **variables propositionnelles**.

Vocabulaire

Soit $\mathcal{X}$ un ensemble au plus dénombrable (souvent fini dans nos exemples) d'éléments appelés **variables propositionnelles**.Les **formules propositionnelles** (ou expressions logiques) sont construites de manière inductive ainsi :

Vocabulaire

Soit $\mathcal{X}$ un ensemble au plus dénombrable (souvent fini dans nos exemples) d'éléments appelés **variables propositionnelles**.Les **formules propositionnelles** (ou expressions logiques) sont construites de manière inductive ainsi :

- $\top$ (vérité), et $\bot$ (fausseté) sont des formules propositionnelles.

Vocabulaire

Soit $\mathcal{X}$ un ensemble au plus dénombrable (souvent fini dans nos exemples) d'éléments appelés **variables propositionnelles**.Les **formules propositionnelles** (ou expressions logiques) sont construites de manière inductive ainsi :

- $\top$ (vérité), et $\perp$ (fausseté) sont des formules propositionnelles.
- Tout élément x de $\mathcal{X}$ est une formule propositionnelle .

Vocabulaire

Soit $\mathcal{X}$ un ensemble au plus dénombrable (souvent fini dans nos exemples) d'éléments appelés **variables propositionnelles**.Les **formules propositionnelles** (ou expressions logiques) sont construites de manière inductive ainsi :

- $\top$ (vérité), et $\perp$ (fausseté) sont des formules propositionnelles.
- Tout élément x de $\mathcal{X}$ est une formule propositionnelle .
- Si a et b sont deux formules propositionnelles, alors :

Vocabulaire

Soit $\mathcal{X}$ un ensemble au plus dénombrable (souvent fini dans nos exemples) d'éléments appelés **variables propositionnelles**.Les **formules propositionnelles** (ou expressions logiques) sont construites de manière inductive ainsi :

- $\top$ (vérité), et $\perp$ (fausseté) sont des formules propositionnelles.
- Tout élément x de $\mathcal{X}$ est une formule propositionnelle .
- Si a et b sont deux formules propositionnelles, alors :
  - la **disjonction** notée $a \vee b$ (lire « a ou b ») est une formule propositionnelle.

Vocabulaire

Soit $\mathcal{X}$ un ensemble au plus dénombrable (souvent fini dans nos exemples) d'éléments appelés **variables propositionnelles**.Les **formules propositionnelles** (ou expressions logiques) sont construites de manière inductive ainsi :

- $\top$ (vérité), et $\bot$ (fausseté) sont des formules propositionnelles.
- Tout élément x de $\mathcal{X}$ est une formule propositionnelle .
- Si a et b sont deux formules propositionnelles, alors :
  - la **disjonction** notée $a \vee b$ (lire « a ou b ») est une formule propositionnelle.
  - la **conjonction** notée $a \wedge b$ (lire « a et b ») est une formule propositionnelle.

Vocabulaire

Soit $\mathcal{X}$ un ensemble au plus dénombrable (souvent fini dans nos exemples) d'éléments appelés **variables propositionnelles**.Les **formules propositionnelles** (ou expressions logiques) sont construites de manière inductive ainsi :

- $\top$ (vérité), et $\bot$ (fausseté) sont des formules propositionnelles.
- Tout élément x de $\mathcal{X}$ est une formule propositionnelle .
- Si a et b sont deux formules propositionnelles, alors :
  - la **disjonction** notée $a \vee b$ (lire « a ou b ») est une formule propositionnelle.
  - la **conjonction** notée $a \wedge b$ (lire « a et b ») est une formule propositionnelle.
  - la **négation** notée $\neg a$ (lire « non a ») est une formule propositionnelle.

Dans la suite, nous noterons $\mathcal{E}(\mathcal{X})$ ou tout simplement $\mathcal{E}$ l'ensemble des formules propositionnelles sur un ensemble de variables $\mathcal{X}$.

Dans la suite, nous noterons $\mathcal{E}(\mathcal{X})$ ou tout simplement $\mathcal{E}$ l'ensemble des formules propositionnelles sur un ensemble de variables $\mathcal{X}$.

par exemple, si $\mathcal{X} = \{x, y\}$,

Dans la suite, nous noterons $\mathcal{E}(\mathcal{X})$ ou tout simplement $\mathcal{E}$ l'ensemble des formules propositionnelles sur un ensemble de variables $\mathcal{X}$.

par exemple, si $\mathcal{X} = \{x, y\}$,

$$\big((x \wedge y) \vee (\neg x)\big) \in \mathcal{E}.$$

Vocabulaire

Les opérateurs $\vee$, $\wedge$ et $\neg$ sont appelés **connecteurs logiques**.

Vocabulaire

Les opérateurs $\vee$, $\wedge$ et $\neg$ sont appelés **connecteurs logiques**.

Vocabulaire

L'arité d'un connecteur logique est le nombre de formules qu'il permet de connecter. Ainsi :

- $\neg$ est une opérateur **unaire** (d'arité 1).
- $\vee$ et $\wedge$ sont des opérateurs **binaires** (d'arité 2)

Pour simplifier l'écriture des formules propositionnelles, nous convenons des règles de priorités suivantes :

- $\neg$ est prioritaire devant $\wedge$
- $\wedge$ est prioritaire devant $\vee$

Pour simplifier l'écriture des formules propositionnelles, nous convenons des règles de priorités suivantes :

- $\neg$ est prioritaire devant $\wedge$
- $\wedge$ est prioritaire devant $\vee$

Ainsi l'expression :

$$\Big(\big((\neg(x)) \wedge y\big) \vee z\Big)$$

Pour simplifier l'écriture des formules propositionnelles, nous convenons des règles de priorités suivantes :

- $\neg$ est prioritaire devant $\wedge$
- $\wedge$ est prioritaire devant $\vee$

Ainsi l'expression :

$$\big(\big((\neg(x)) \wedge y\big) \vee z\big)$$

se simplifie en :

$$\neg x \wedge y \vee z$$

On définit deux nouveaux connecteurs logiques binaires :

On définit deux nouveaux connecteurs logiques binaires :

Vocabulaire

Si a et b sont deux formules propositionnelles :

- $a \rightarrow b = \neg a \vee b$ (on lit « a implique b »).

On définit deux nouveaux connecteurs logiques binaires :

Vocabulaire

Si a et b sont deux formules propositionnelles :

- $a \rightarrow b = \neg a \vee b$ (on lit « a implique b »).
- $a \leftrightarrow b = (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$ (on lit « a équivaut à b »).

On définit deux nouveaux connecteurs logiques binaires :

Vocabulaire

Si a et b sont deux formules propositionnelles :

- $a \rightarrow b = \neg a \vee b$ (on lit « a implique b »).
- $a \leftrightarrow b = (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$ (on lit « a équivaut à b »).

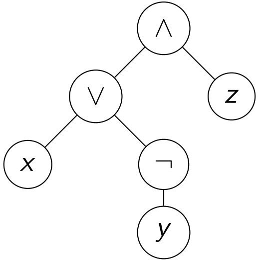
Ce qui permet de réduire les écritures, par exemple :

$$\neg(x \rightarrow y) \vee (z \leftrightarrow x)$$

De par sa définition inductive, la représentation d'une formule propositionnelle sous forme d'arbre est naturelle. Par exemple, l'expression

$$(x \vee \neg y) \wedge z$$

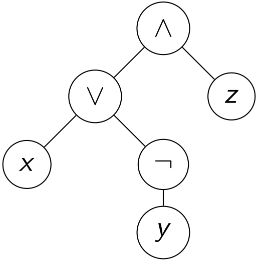
sera représentée par l'arbre suivant :



De par sa définition inductive, la représentation d'une formule propositionnelle sous forme d'arbre est naturelle. Par exemple, l'expression

$$(x \vee \neg y) \wedge z$$

sera représentée par l'arbre suivant :



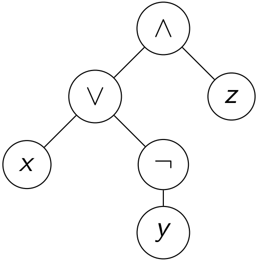
Vocabulaire

La **taille d'une formule** est le nombre de nœuds internes, c'est à dire le nombre de connecteurs logiques. Ici 3.

De par sa définition inductive, la représentation d'une formule propositionnelle sous forme d'arbre est naturelle. Par exemple, l'expression

$$(x \vee \neg y) \wedge z$$

sera représentée par l'arbre suivant :



Vocabulaire

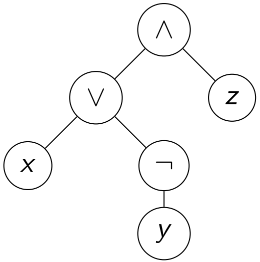
La **taille t d'une formule** peut être définie ainsi :

$$\begin{cases} t(\top) = t(\bot) = t(x) = 0 \text{ si } x \in \mathcal{X} \\ t(\bigstar f) = 1 + t(f) \\ t(f_1 \bigstar f_2) = 1 + t(f_1) + t(f_2) \end{cases}$$

De par sa définition inductive, la représentation d'une formule propositionnelle sous forme d'arbre est naturelle. Par exemple, l'expression

$$(x \vee \neg y) \wedge z$$

sera représentée par l'arbre suivant :



Vocabulaire

La **hauteur d'une formule** est la hauteur de l'arbre. Ici 3 :

$$\begin{cases} h(\top) = h(\bot) = h(x) = 0 \text{ si } x \in \mathcal{X} \\ h(\bigstar f_1) = 1 + h(f_1) \\ h(f_1 \bigstar f_2) = 1 + \max\{h(f_1); h(f_2)\} \end{cases}$$

Vocabulaire

Une **proposition** est un énoncé auquel on peut attribuer une valeur de vérité `VRAI` ou `FAUX`.

Vocabulaire

Une **proposition** est un énoncé auquel on peut attribuer une valeur de vérité `VRAI` ou `FAUX`.

Exemple de propositions :

- Paris est la capitale de la France.
- Chuck Norris mesure 5 mètres.

Vocabulaire

Une **proposition** est un énoncé auquel on peut attribuer une valeur de vérité `VRAI` ou `FAUX`.

Exemple de propositions :

- Paris est la capitale de la France.
- Chuck Norris mesure 5 mètres.

Mais :

- $x^2 - 4 \leqslant 0$
- Qui a volé l'orange du marchand ?

n'en sont pas.

Une formule propositionnelle n'est donc pas une proposition...

Une formule propositionnelle n'est donc pas une proposition... sauf si on donne des valeurs aux variables propositionnelles.

Une formule propositionnelle n'est donc pas une proposition... sauf si on donne des valeurs aux variables propositionnelles.

Vocabulaire

On appelle ensemble des **booléens** l'ensemble $\mathbb{B} = \{\mathtt{V}; \mathtt{F}\}$

Vocabulaire

Soit $\mathcal{X}$ un ensemble (au plus dénombrable) de variables. Une **valuation** sur $\mathcal{X}$ est une application $\mu : \mathcal{X} \to \mathbb{B}$

Une choisir une valuation est donc le fait de fixer des valeurs à toutes les variables propositionnelles.

Vocabulaire

On appelle **valeur de vérité** d'une formule propositionnelle f pour une valuation μ donnée, l'évaluation de f notée f_μ lorsque les variables prennent les valeurs données par μ.

Vocabulaire

On appelle **valeur de vérité** d'une formule propositionnelle f pour une valuation μ donnée, l'évaluation de f notée f_μ lorsque les variables prennent les valeurs données par μ.

Ainsi f_μ est une fonction de $\mathcal{E}(\mathcal{X})$ dans $\mathbb{B}$ définie par induction :

Vocabulaire

On appelle **valeur de vérité** d'une formule propositionnelle f pour une valuation μ donnée, l'évaluation de f notée f_μ lorsque les variables prennent les valeurs données par μ.

Ainsi f_μ est une fonction de $\mathcal{E}(\mathcal{X})$ dans $\mathbb{B}$ définie par induction :

- $\top_\mu = \mathtt{V}$
- $\bot_\mu = \mathtt{F}$
- $x_\mu = \mu(x)$ si $x \in \mathcal{X}$

Vocabulaire

On appelle **valeur de vérité** d'une formule propositionnelle f pour une valuation μ donnée, l'évaluation de f notée f_μ lorsque les variables prennent les valeurs données par μ.

Ainsi f_μ est une fonction de $\mathcal{E}(\mathcal{X})$ dans $\mathbb{B}$ définie par induction :

si $f_1 \in \mathcal{E}$,

- $\neg {f_1}_\mu = \begin{cases} \mathtt{V} \text{ si } {f_1}_\mu = \mathtt{F} \\ \mathtt{F} \text{ si } {f_1}_\mu = \mathtt{V} \end{cases}$

Vocabulaire

On appelle **valeur de vérité** d'une formule propositionnelle f pour une valuation μ donnée, l'évaluation de f notée f_μ lorsque les variables prennent les valeurs données par μ.

Ainsi f_μ est une fonction de $\mathcal{E}(\mathcal{X})$ dans $\mathbb{B}$ définie par induction :

si $f_1, f_2 \in \mathcal{E}^2$,

- $${f_1 \wedge f_2}_\mu = \begin{cases} \texttt{V} \text{ si } {f_1}_\mu = \texttt{V} \text{ et } {f_2}_\mu = \texttt{V} \\ \texttt{F} \text{ sinon.} \end{cases}$$

et

- $${f_1 \vee f_2}_\mu = \begin{cases} \texttt{V} \text{ si } {f_1}_\mu = \texttt{V} \text{ ou } {f_2}_\mu = \texttt{V} \\ \texttt{F} \text{ sinon.} \end{cases}$$

Pour évaluer les résultats, on utilise parfois cette table de valeur appelée **table de vérité** :

a	b	$\neg a$	$a \vee b$	$a \wedge b$
V	V	F	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	V	F
F	F	V	F	F

Vocabulaire

La **table de vérité** d'une formule propositionnelle f est un tableau dont les lignes sont indexées par toutes les valuations possibles des variables intervenant dans f.

On peut alors déterminer la table de vérité des autres connecteurs :

$$a \rightarrow b = \neg a \vee b$$

a	b	$\neg a$	$a \rightarrow b$
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

On peut alors déterminer la table de vérité des autres connecteurs :

$$a \to b = \neg a \vee b$$

a	b	$\neg a$	$a \to b$
V	V	F	
V	F	F	
F	V	V	
F	F	V	

On peut alors déterminer la table de vérité des autres connecteurs :

$$a \rightarrow b = \neg a \vee b$$

a	b	$\neg a$	$a \rightarrow b$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

On peut alors déterminer la table de vérité des autres connecteurs :

$$a \leftrightarrow b = (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$$

a	b	$a \rightarrow b$	$b \rightarrow a$	$a \leftrightarrow b$
V	V	V		
V	F	F		
F	V	V		
F	F	V		

On peut alors déterminer la table de vérité des autres connecteurs :

$$a \leftrightarrow b = (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$$

a	b	$a \rightarrow b$	$b \rightarrow a$	$a \leftrightarrow b$
V	V	V	V	
V	F	F	V	
F	V	V	F	
F	F	V	V	

On peut alors déterminer la table de vérité des autres connecteurs :

$$a \leftrightarrow b = (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$$

a	b	$a \rightarrow b$	$b \rightarrow a$	$a \leftrightarrow b$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

En résumé :

a	b	$\neg a$	$a \vee b$	$a \wedge b$	$a \rightarrow b$	$a \leftrightarrow b$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	V	F	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Propriété

Si $\mathcal{X}$ contient n variables distinctes, alors il y a 2^n valuations différentes sur $\mathcal{X}$

Par exemple, dressons la table de vérité de la formule :

$$\neg\big((x \rightarrow y) \vee z\big) \vee \big(x \wedge (y \vee \neg z)\big)$$

$$a = \neg\big((x \to y) \vee z\big) \vee \big(x \wedge (y \vee \neg z)\big)$$

sous formule gauche :

x	y	z	$x \to y$	$(x \to y) \vee z$	$\neg\big((x \to y) \vee z\big)$
V	V	V			
V	V	F			
V	F	V			
V	F	F			
F	V	V			
F	V	F			
F	F	V			
F	F	F			

$$a = \neg\big((x \to y) \vee z\big) \vee \big(x \wedge (y \vee \neg z)\big)$$

sous formule gauche :

x	y	z	$x \to y$	$(x \to y) \vee z$	$\neg\big((x \to y) \vee z\big)$
V	V	V	V		
V	V	F	V		
V	F	V	F		
V	F	F	F		
F	V	V	V		
F	V	F	V		
F	F	V	V		
F	F	F	V		

$$a = \neg\big((x \to y) \vee z\big) \vee \big(x \wedge (y \vee \neg z)\big)$$

sous formule gauche :

x	y	z	$x \to y$	$(x \to y) \vee z$	$\neg\big((x \to y) \vee z\big)$
V	V	V	V	V	
V	V	F	V	V	
V	F	V	F	V	
V	F	F	F	F	
F	V	V	V	V	
F	V	F	V	V	
F	F	V	V	V	
F	F	F	V	V	

$$a = \neg\big((x \to y) \vee z\big) \vee \big(x \wedge (y \vee \neg z)\big)$$

sous formule gauche :

x	y	z	$x \to y$	$(x \to y) \vee z$	$\neg\big((x \to y) \vee z\big)$
V	V	V	V	V	F
V	V	F	V	V	F
V	F	V	F	V	F
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	F
F	V	F	V	V	F
F	F	V	V	V	F
F	F	F	V	V	F

$$a = \neg\big((x \to y) \vee z\big) \vee \big(x \wedge (y \vee \neg z)\big)$$

sous formule droite :

x	y	z	$\neg z$	$y \vee \neg z$	$x \wedge (y \vee \neg z)$
V	V	V			
V	V	F			
V	F	V			
V	F	F			
F	V	V			
F	V	F			
F	F	V			
F	F	F			

$$a = \neg\big((x \rightarrow y) \vee z\big) \vee \big(x \wedge (y \vee \neg z)\big)$$

sous formule droite :

x	y	z	$\neg z$	$y \vee \neg z$	$x \wedge (y \vee \neg z)$
V	V	V	F		
V	V	F	V		
V	F	V	F		
V	F	F	V		
F	V	V	F		
F	V	F	V		
F	F	V	F		
F	F	F	V		

$$a = \neg\big((x \rightarrow y) \vee z\big) \vee \big(x \wedge (y \vee \neg z)\big)$$

sous formule droite :

x	y	z	$\neg z$	$y \vee \neg z$	$x \wedge (y \vee \neg z)$
V	V	V	F	V	
V	V	F	V	V	
V	F	V	F	F	
V	F	F	V	V	
F	V	V	F	V	
F	V	F	V	V	
F	F	V	F	F	
F	F	F	V	V	

$$a = \neg\big((x \rightarrow y) \vee z\big) \vee \big(x \wedge (y \vee \neg z)\big)$$

sous formule droite :

x	y	z	$\neg z$	$y \vee \neg z$	$x \wedge (y \vee \neg z)$
V	V	V	F	V	V
V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	V	F
F	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	F
F	F	F	V	V	F

$$a = \neg\big((x \to y) \vee z\big) \vee \big(x \wedge (y \vee \neg z)\big)$$

x	y	z	$\neg\big((x \to y) \vee z\big)$	$x \wedge \big(y \vee \neg z\big)$	a
V	V	V			
V	V	F			
V	F	V			
V	F	F			
F	V	V			
F	V	F			
F	F	V			
F	F	F			

$$a = \neg\big((x \to y) \vee z\big) \vee \big(x \wedge (y \vee \neg z)\big)$$

x	y	z	$\neg\big((x \to y) \vee z\big)$	$x \wedge \big(y \vee \neg z\big)$	a
V	V	V	F		
V	V	F	F		
V	F	V	F		
V	F	F	V		
F	V	V	F		
F	V	F	F		
F	F	V	F		
F	F	F	F		

$$a = \neg\big((x \to y) \vee z\big) \vee \big(x \wedge (y \vee \neg z)\big)$$

x	y	z	$\neg\big((x \to y) \vee z\big)$	$x \wedge \big(y \vee \neg z\big)$	a
V	V	V	F	V	
V	V	F	F	V	
V	F	V	F	F	
V	F	F	V	V	
F	V	V	F	F	
F	V	F	F	F	
F	F	V	F	F	
F	F	F	F	F	

$$a = \neg\big((x \to y) \vee z\big) \vee \big(x \wedge (y \vee \neg z)\big)$$

x	y	z	$\neg\big((x \to y) \vee z\big)$	$x \wedge \big(y \vee \neg z\big)$	a
V	V	V	F	V	V
V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F
F	V	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F
F	F	F	F	F	F

Vocabulaire

Deux formules propositionnelles a et b sont dites **sémantiquement équivalentes** ou plus simplement **équivalentes** si leurs valeurs de vérité coïncident quelle que soit la valuation. On note alors $a \equiv b$.

Propriété

Deux formules propositionnelles sont équivalentes si et seulement si elles ont les mêmes tables de vérité

Propriété

Commutativité : $\forall (a, b) \in \mathcal{E}(\mathcal{X})^2$,

- $a \wedge b \equiv b \wedge a$
- $a \vee b \equiv b \vee a$

Associativité : $\forall (a, b, c) \in \mathcal{E}(\mathcal{X})^3$,

- $(a \wedge b) \wedge c \equiv a \wedge (b \wedge c)$
- $(a \vee b) \vee c \equiv a \vee (b \vee c)$

Idempotence : $\forall a \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$,

- $a \wedge a \equiv a$
- $a \vee a \equiv a$

Propriété

Élément neutre : $\forall a, \in \mathcal{E}(\mathcal{X}),\ \ a \wedge \top \equiv a$
Élément absorbant : $\forall a, \in \mathcal{E}(\mathcal{X}),\ \ a \wedge \bot \equiv \bot$
Distributivité : $\forall (a, b, c) \in \mathcal{E}(\mathcal{X})^3$,

- $a \wedge (b \vee c) \equiv (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
- $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

Lois de De Morgan : $\forall (a, b) \in \mathcal{E}(\mathcal{X})^2$,

- $\neg(a \wedge b) \equiv (\neg a) \vee (\neg b)$
- $\neg(a \vee b) \equiv (\neg a) \wedge (\neg b)$

Vocabulaire

Soit μ une valuation sur $\mathcal{X}$. On dit que μ est un **modèle** pour une formule f si la valeur de vérité de f pour cette valuation est VRAIE : $f_\mu = \mathtt{V}$.

Vocabulaire

Soit μ une valuation sur $\mathcal{X}$. On dit que μ est un **modèle** pour une formule f si la valeur de vérité de f pour cette valuation est VRAIE : $f_\mu = \mathtt{V}$.

Dans notre exemple précédent $\mu : \left\{ \begin{array}{l} x \longmapsto \mathtt{V} \\ y \longmapsto \mathtt{V} \\ z \longmapsto \mathtt{F} \end{array} \right.$ est un modèle pour la formule $\neg\big((x \rightarrow y) \vee z\big) \vee \big(x \wedge (y \vee \neg z)\big)$

Vocabulaire

On dit qu'une formule propositionnelle est **satisfiable** si elle admet un modèle

Vocabulaire

On dit qu'une formule est **tautologique** ou qu'une formule est une **tautologie** si toute valuation est un modèle :

$$\forall \mu \in \mathbb{B}^{\mathcal{X}}, \; f_\mu = \mathtt{V}$$

Vocabulaire

On dit qu'une formule est **tautologique** ou qu'une formule est une **tautologie** si toute valuation est un modèle :

$$\forall \mu \in \mathbb{B}^{\mathcal{X}},\ f_\mu = \mathtt{V}$$

- $\top$ est une tautologie
- Si f est une tautologie, on note : $\models f$

Vocabulaire

On dit qu'une formule est **tautologique** ou qu'une formule est une **tautologie** si toute valuation est un modèle :

$$\forall \mu \in \mathbb{B}^{\mathcal{X}},\ f_\mu = \mathtt{V}$$

- $\top$ est une tautologie
- Si f est une tautologie, on note : $\models f$

Propriété

Tiers exclus : $\forall a \in \mathcal{E}(\mathcal{X}),\ \neg a \vee a$ est une tautologie

Vocabulaire

On dit qu'une formule est **tautologique** ou qu'une formule est une **tautologie** si toute valuation est un modèle :

$$\forall \mu \in \mathbb{B}^{\mathcal{X}},\ f_\mu = \mathtt{V}$$

- $\top$ est une tautologie
- Si f est une tautologie, on note : $\models f$

Propriété

Tiers exclus : $\forall a \in \mathcal{E}(\mathcal{X}),\ \neg a \vee a$ est une tautologie

Propriété

Deux formules f_1 et f_2 sont équivalentes si et seulement si $f_1 \leftrightarrow f_2$ est une tautologie

Vocabulaire

On dit qu'une formule est **antilogique** ou qu'une formule est une **antilogie** si elle ne possède aucun modèle :

Vocabulaire

On dit qu'une formule est **antilogique** ou qu'une formule est une **antilogie** si elle ne possède aucun modèle :

$\perp$ est une antilogie.

Vocabulaire

Une formule f_2 est une **conséquence logique** de la formule f_1 si tout modèle de f_1 est une modèle de f_2 :

$$\forall \mu \in \mathbb{B}^{\mathcal{X}},\ \left(\ (f_{1\mu} = \mathtt{V}) \Longrightarrow (f_{2\mu} = \mathtt{V})\ \right)$$

Vocabulaire

Une formule f_2 est une **conséquence logique** de la formule f_1 si tout modèle de f_1 est une modèle de f_2 :

$$\forall \mu \in \mathbb{B}^{\mathcal{X}},\ \left(\ \left({f_1}_\mu = \mathtt{V}\right) \Longrightarrow \left({f_2}_\mu = \mathtt{V}\right)\ \right)$$

dit autrement,

Propriété

Une formule f_2 est une conséquence logique de la formule f_1 si et seulement si la formule $f_1 \rightarrow f_2$ est une tautologie.

On généralise à un ensemble de formules :

Vocabulaire

Une formule f est la **conséquence logique** d'un ensemble de formules Γ si toute valuation donnant la valeur vraie à toutes les formules de Γ entraîne la valeur vraie pour f. On note alors $\Gamma \models f$:

$$\forall \mu \in \mathbb{B}^{\mathcal{X}},\ \left(\left(\forall f_i \in \Gamma, f_{i\mu} = \mathtt{V}\right) \Longrightarrow f_\mu = \mathtt{V}\right)$$

On généralise à un ensemble de formules :

Vocabulaire

Une formule f est la **conséquence logique** d'un ensemble de formules Γ si toute valuation donnant la valeur vraie à toutes les formules de Γ entraîne la valeur vraie pour f. On note alors $\Gamma \models f$:

$$\forall \mu \in \mathbb{B}^{\mathcal{X}},\ \left(\left(\forall f_i \in \Gamma, {f_i}_\mu = \mathtt{V}\right) \Longrightarrow f_\mu = \mathtt{V}\right)$$

dit autrement,

Propriété

Une formule f est la **conséquence logique** d'un ensemble de formules $\Gamma = \{f_1, ..., f_n\}$ si et seulement si $f_1 \wedge ... \wedge f_n \rightarrow f$ est une tautologie.