TD 5 - Logique propositionnelle

1 Les incontournables

Exercice 1 **[Tables]**Déterminer les tables de vérité des expressions suivantes

1. $(x \to y) \vee (y \to z)$
2. $(\neg x \vee y) \wedge (z \to x)$
3. $(x \oplus y) \to z$ où $\oplus$ est le "ou exclusif" : $V \oplus V = F \oplus F = F$ et $V \oplus F = F \oplus V = V$

Exercice 2 **[Archéologie]** Un groupe d'archéologues arrive à la porte d'un laboratoire Atlante intact, comportant deux leviers A et B placés en position haute. Le laboratoire peut s'auto-détruire si l'on ne répond pas correctement à l'énigme proposée sous forme de 3 propositions, écrites sur la porte.

P_1 : Il faut baisser le levier A.
P_2 : Il faut baisser simultanément les leviers A et B.
P_3 : Il ne faut pas baisser le levier B.

1. Exprimer P_1, P_2 et P_3 à l'aide de formules propositionnelles dépendant de variables a et b à définir.
2. La règle Atlante veut que les propositions soient alternativement vraies et fausses (ou fausses et vraies). Exprimer cette règle en fonction des propositions P_1, P_2 et P_3.
3. En utilisant le calcul des propositions (formules logiques ou tables de vérité) résoudre l'énigme.

Exercice 3 **[Tiers exclus]** En utilisant le principe du tiers exclus, démontrer qu'il est possible de trouver deux irrationnels a et b tels que a^b soit rationnel.

Exercice 4 **[Système complet de connecteurs]**

1. Montrer que toute formule propositionnelle est équivalente à une formule propositionnelle n'utilisant que les connecteurs $\wedge$ et $\neg$. *On dit que* $S = \{\wedge, \neg\}$ *est un système* complet *de connecteurs.*
2. Soit le connecteur ternaire G défini par $G(a, b, c) = (\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b) \vee (\neg b \wedge \neg c)$. où a, b, c sont des variables propositionnelles. Montrer que toute formule propositionnelle est équivalente à une formule n'utilisant que le connecteur G.

2 Pour s'entrainer

Exercice 5 **[Tautologie, antilogie]** Soit $\star \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow, \texttt{xor}\}$, déterminer si $x \star (y \star z)$ et $(x \star y) \star (\neg(x \star y))$ sont des tautologies, des antilogies ou aucun des deux.

Exercice 6 **[Problème des 4 menteurs]** On a établi les quatre vérités suivantes :

P_1 Si l'Amiral dit la vérité alors le Maître d'hôtel la dit aussi.
P_2 Le Maître d'hôtel et le Comte ne peuvent dire la vérité ensemble.
P_3 Le Comte et le Pasteur ne mentent pas ensemble.
P_4 Si le Pasteur dit la vérité alors le Maître d'hôtel ment.

Sachant, d'autre part, que deux personnes, et deux seulement, ont menti, déterminez leur identité.

Correction 1 Les tables des 3 expressions :

x	y	z	[1]	[2]	[3]
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	V	F	V
F	V	F	V	V	F
F	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V

Correction 2 Si on pose a : « le levier A doit être baissé » et b : « le levier B doit être baissé »

1. $P_1 = a$; $P_2 = a \wedge b$ et $P_3 = \neg b$.
2. $R = \big(P_1 \wedge \neg P_2 \wedge P_3\big) \vee \big(\neg P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3\big)$
3. On cherche donc une valuation μ sur $\{a, b\}$ telle que $[\![R]\!]_\mu = V$. Réalisons une table de vérité :

a	b	P_1	P_2	P_3	$P_1 \wedge \neg P_2 \wedge P_3$	$\neg P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3$	R
V	V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	V	V	F	V
F	V	F	F	F	F	F	F
F	F	F	F	V	F	F	F

Le seul modèle pour R est μ tel que $\mu(a) = V$ et $\mu(b) = F$. Il faut donc uniquement baisser le levier A.

Correction 3 On sait que $\sqrt{2}$ est irrationnel. 2 possibilités :

- si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel, alors il suffit de poser $a = b = \sqrt{2}$.
- sinon $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est irrationnel (c'est le principe du tiers exclus). On peut poser $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $b = \sqrt{2}$ alors : $a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$

Correction 4

1. Montrons qu'en plus de $x \wedge y$, on peut construire toutes les formules de base :
   - $\bot \equiv x \wedge \neg x$
   - $\top \equiv \neg\bot \equiv \neg(x \wedge \neg x)$
   - $x \vee y \equiv \neg(\neg x \wedge \neg y)$ d'après les loi de De Morgan.

   Par induction, toute formule propositionnelle s'écrit à l'aide des connecteurs $\wedge$ et $\neg$.
2. De la même manière, comme le système $\{\neg, \wedge\}$ est complet d'après la question précédente, nous allons essayer d'exprimer $\neg$ et $x \wedge y$ à l'aide uniquement de l'opérateur G.
   - $G(x, x, x) = (\neg x \wedge x \wedge x) \vee (x \wedge \neg x) \vee (\neg x \wedge \neg x) \equiv \bot \vee \bot \vee \neg x \equiv \neg x$
     Après quelques essais :
   - $G(x, \neg y, y) = (\neg x \wedge \neg y \wedge y) \vee (x \wedge y) \vee (y \wedge \neg y)\,. \equiv \bot \vee (x \wedge y) \vee \bot \equiv x \wedge y$

   Ainsi, toute formule propositionnelle peut s'exprimer uniquement avec l'opérateur G.

Correction 5 Après étude de chacun des cas on a

$\star$	$\wedge$	$\vee$	$\to$	$\leftrightarrow$	xor
$x \star (y \star z)$	Rien	Rien	Tautologie	Rien	Rien
$(x \star y) \star (\neg(x \star y))$	Antilogie	Tautologie	Rien	Antilogie	Tautologie

Correction 6 Si on note les variables propositionnelles :

- a : "L'Amiral dit la vérité" ;
- m : "Le Maître d'hôtel dit la vérité" ;
- c : "Le Comte dit la vérité" ;
- p : "Le Pasteur dit la vérité" ;

On peut alors traduite les propositions de l'énoncé :

P_1 : $a \longrightarrow m$.
P_2 : $\neg(m \wedge c)$.
P_3 : $\neg(\neg c \wedge \neg p) \equiv c \vee p$.
P_4 : $p \longrightarrow \neg m$.

On réalise la table de vérité, a priori il y aurait $2^4 = 16$ lignes, mais comme ici on sait exactement 2 personnes disent la vérité, il y seulement $(42) = 6$ possibilités :

a	m	c	p	P_1	P_2	P_3	P_4
V	V	F	F	V	V	F	V
V	F	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	V	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	V	V	F
F	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**

Seule pour la dernière ligne, les 4 proporisitons sont vraies, donc l'Amiral et le maître d'hôtel mentent, les autres disent la vérité.